TD1

Généralité sur les espaces vectoriels et les applications linéaires

Exercice 1

Dans la liste suivante, quelles familles de vecteurs $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{Q}^3$ sont libres, génératrices, ou forment des bases de $\mathbb{Q}^3$?

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ **b)** $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ **c)** $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Exercice 2

Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes $P(X)$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ et de degré $\deg P \leq n$.

a) Soient $\phi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ et $\psi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ les applications telles que $\phi(P(X)) = P(X+1)$ et $\psi(P(X)) = P(X-1)$. Vérifier que ces applications sont linéaires et expliciter leur matrice dans la base naturelle de $\mathcal{P}_n$ constituée des polynômes $(1, X, \ldots, X^n)$. La matrice de ϕ sera notée A. La matrice de ψ sera notée B.

b) Comment s'écrit l'image d'un polynôme $P(X)$ par l'application composée $\psi \circ \phi$? Quelle relation peut-on déduire de ce résultat quant aux matrices A et B ?

Exercice 3

On travaille dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Prouver que les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$ forment une famille libre.

Indication: Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ des scalaires tels que $\lambda f + \mu g = 0$. On évaluera la fonction $(\lambda f + \mu g)(x)$ en quelques valeurs $x \in \mathbb{R}$ bien choisies.

b) On note $\mathcal{P}$ le sous-espace de $\mathcal{F}$ engendré par les fonctions f et g. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de $\mathcal{P}$. Soit $\phi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $\phi_\alpha(x) = \phi(x + \alpha)$, pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que ϕ_α appartient à $\mathcal{P}$ puis vérifier que l'application $T_\alpha : \phi \mapsto \phi_\alpha$ définit une application linéaire $T_\alpha : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$. Comment s'écrit la matrice de T_α dans la base f, g ?

c) Quelle est l'image d'une application ϕ par l'application composée $T_\alpha \circ T_\beta$? Que donne le produit des matrices associées à T_α et T_β ?

Matrices de changement de base et applications

Exercice 4

On travaille dans un espace V de dimension 3 dont une base est notée (e_1, e_2, e_3).

a) Prouver que les vecteurs (f_1, f_2, f_3) tels que

$$f_1 = e_1 - e_2 + e_3, \quad f_2 = e_1 + e_2, \quad f_3 = e_1 + e_3$$

forment une base V.

b) Déterminer la matrice $P = P_{(f_1,f_2,f_3)}(e_1, e_2, e_3)$ des coordonnées de (e_1, e_2, e_3) dans la base (f_1, f_2, f_3).

c) Quelles sont les coordonnées du vecteur $v = e_1 + e_2 + e_3$ dans la base (f_1, f_2, f_3) ?

Exercice 5

On travaille dans l'espace $V = \mathbb{R}^2$. On note (e_1, e_2) les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

a) Prouver que les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{R}^2$.
Comment s'écrit la matrice $P = P_{(e_1,e_2)}(u_1, u_2)$ de changement de base de (u_1, u_2) à (e_1, e_2) et la matrice de changement de base inverse $Q = P_{(u_1,u_2)}(e_1, e_2)$?

b) On note L_1 et L_2 les droites de $\mathbb{R}^2$ respectivement engendrées par les vecteurs u_1 et u_2. Soit $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection sur L_1 parallèlement à L_2. Comment s'écrit la matrice de π dans la base (u_1, u_2) ? Comment s'écrit la matrice de π dans la base (e_1, e_2) ? (On utilisera le résultat précédent et la formule de changement de bases.)

c) Soit $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique s'écrit

$$S = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\sigma(u_1)$ et $\sigma(u_2)$. Comment s'écrit la matrice de σ dans la base (u_1, u_2) ? Quelle transformation géométrique représente l'application σ ?

Méthode du pivot et applications

Exercice 6 (exercice guidé d'application du cours)

On travaille dans l'espace $\mathbb{R}^4$. On note $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base naturelle de cet espace. Soit $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) (au départ et à l'arrivée) s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Utiliser des opérations selon les lignes pour écrire la matrice de ϕ sous une forme échelonnée (selon les lignes), interpréter cette construction comme un changement de base à l'arrivée $\underline{e} \mapsto \underline{f}$ dans l'expression de ϕ, et expliciter la matrice $P = P_{\underline{f}}(e_1, e_2, e_3, e_4)$ correspondant à ce changement de base.

b) Utiliser le résultat obtenu dans la question précédente pour expliciter une base de $\operatorname{Im} \phi$. Construire également une base de $\operatorname{Ker} \phi$ en utilisant la forme de ϕ obtenue dans la question précédente.

c) Comment s'exprime un vecteur

$$v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

dans la base $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ considérée dans la question 1 ?

Indication: On peut appliquer la formule de changement de base matricielle ou reporter les opérations sur les lignes considérée dans la construction de la question 1 sur le vecteur v pour obtenir le résultat demandé.

Utiliser ce calcul pour expliciter une description de $\operatorname{Im} \phi$ par des équations.

Exercice 7 (exercice guidé d'application du cours)

On travaille à nouveau dans l'espace $\mathbb{R}^4$. On note toujours $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base naturelle de cet espace. On considère l'application linéaire $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) (au départ et à l'arrivée) s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

comme dans l'exercice précédent.

a) Utiliser des opérations selon les colonnes pour écrire la matrice de ϕ sous une forme échelonnée (selon les colonnes), interpréter cette construction comme un changement de base au départ de base $\underline{e} \mapsto \underline{e}'$ dans l'expression de ϕ, et expliciter la matrice $P = P_{\underline{e}}(e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ correspondant à ce changement de base.

b) Utiliser le résultat obtenu dans la question précédente pour expliciter une base de $\operatorname{Im} \phi$ et une base de $\operatorname{Ker} \phi$.

Exercice 8

Soit $\phi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2$ l'application linéaire définie par la matrice

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ -1 & -i & 1 & i \end{smallmatrix}\right).$$

Expliciter une base de $\operatorname{Ker}\phi$. L'application ϕ est-elle surjective ?

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel, et u une application linéaire de E dans E. Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses :

a) Si $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est libre, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$.

b) Si $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$ est libre, il en est de même de $e_1, e_2, \ldots, e_p$.

c) Si $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est génératrice de E, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$.

d) Si $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$ est génératrice de E, il en est de même de $e_1, e_2, \ldots, e_p$.

e) Si $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$ est une base de $\operatorname{Im} u$, alors $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est une base d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$.

Exercice 10

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f + \mathrm{Id}$.

Montrer que f est un automorphisme de E.