TD2

Permutations

Exercice 1

Calculer la décomposition en cycles et la signature des permutations :

a) $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 2

On note $\theta \in \Sigma_{2n}$ la permutation :

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & n+n \\ n+1 & \cdots & n+n & 1 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

a) Comment θ se décompose-t-elle en produit de cycles ?

b) Quel est le nombre d'inversions et la signature de θ ?

Exercice 3

Peut-on construire une permutation qui a l'ensemble des paires $i < j$ tout entier comme ensemble d'inversions, c'est à dire telle que l'on ait $s(j) > s(i)$ pour toute paire $i < j$?

Exercice 4

Soit $c = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_r)$ un cycle de longueur r dans le groupe des permutations de Σ_n. Soit $s \in \Sigma_n$ une permutation quelconque. Comment s'écrit la décomposition en cycles de la permutation composée $\theta = scs^{-1}$?

Indication : Que vaut $\theta(s(a_i))$, pour $i = 1, \ldots, r$? Que vaut $\theta(s(b))$, lorsque $b \neq a_1, \ldots, a_r$?

Déterminants

Exercice 5 (Quiz)

a) On a
$$\operatorname{Det}\left(\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{smallmatrix}\right)\right) = \operatorname{Det}\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) + \operatorname{Det}\left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{smallmatrix}\right).$$

Vrai ou *Faux* ?

b) On a
$$\operatorname{Det}\left(\lambda\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)\right) = \lambda \operatorname{Det}\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right).$$

Vrai ou *Faux* ? Si «Faux», quelle relation lie $\operatorname{Det}(\lambda A)$ et $\operatorname{Det}(A)$?

c) Soient A et B des matrices $n \times n$. On a $\operatorname{Det}(AB) = \operatorname{Det}(BA)$ même si $AB \neq BA$.

Vrai ou *Faux* ?

d) Soient A et B des matrices $n \times n$. On dit que A est semblable à B si on a $A = PBP^{-1}$ pour une matrice inversible P. Si A est semblable à B, alors on a $\operatorname{Det}(A) = \operatorname{Det}(B)$.

Vrai ou *Faux* ?

Exercice 6 (Quiz)

a) Que peut-on dire du déterminant d'une matrice $n \times n$ nilpotente (c'est à dire vérifiant $A^N = 0$ pour un certain $N > 0$) ?

b) Que peut-on dire du déterminant d'une matrice $n \times n$ telle que $A^2 = I$?

c) Que peut-on dire du déterminant d'une matrice $n \times n$ antisymétrique (c'est à dire telle que ${}^tA = -A$) lorsque n est impair ?

Exercice 7 On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On utilisera que $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.

a) Montrer que les vecteurs
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$$
constituent une base de $\mathbb{C}^3$.

b) Soit $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'application linéaire associée à la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$
Calculer $\phi(u_1), \phi(u_2), \phi(u_3)$ et donner l'expression de la matrice de ϕ dans la base (u_1, u_2, u_3) au départ et à l'arrivée.

c) Donner une factorisation de $3abc - a^3 - b^3 - c^3$ en produit d'expressions linéaires en a, b, c. *Indication : On calculera* $\operatorname{Det}(\phi)$ *en utilisant la matrice obtenue dans la question b).*

Exercice 8

a) Calculer le déterminant de la matrice

$$V(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

sous forme factorisée. Utiliser le résultat obtenu pour donner des conditions sur les paramètres (α,β,γ) assurant que cette matrice $V(\alpha,\beta,\gamma)$ est inversible.

b) Calculer le déterminant de la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sous forme factorisée. Utiliser ce résultat pour déterminer pour quelles valeurs du paramètre t cette matrice est inversible.

c) Donner une expression factorisée du déterminant de la matrice

$$P = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

et préciser les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{Q}$ pour lesquelles cette matrice P est inversible.

Exercice 9

Le but de l'exercice est de déterminer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & b \\ 0 & \cdots & 0 & x & b \\ a & \cdots & a & a & x \end{pmatrix},$$

pour des paramètres a, b, x. On note D_n le déterminant de cette matrice en dimension n.

a) Prouver, par un développement approprié (selon une ligne ou une colonne bien choisie), que l'on a la relation $D_n = xD_{n-1} - abx^{n-2}$, pour tout $n \geq 3$.

b) Puis établir la formule $D_n = x^n - (n-1)abx^{n-2}$, pour $n \geq 2$.

Exercice 10 *

Le but de l'exercice est de déterminer le déterminant de la matrice

$$A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ c & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ c & \cdots & \cdots & c & a \end{pmatrix}$$

pour des paramètres a, b, c tels que $b \neq c$.

a) Montrer que $P(t) = \text{Det}\, A(a-t, b-t, c-t)$ est un polynôme de degré 1 en t.

Indication : On combinera des opérations et un développement selon une ligne ou une colonne.

b) Déterminer les valeurs $P(b)$ et $P(c)$. En déduire l'expression du polynôme $P(t)$ en utilisant ce résultat.

c) Conclure quant à l'expression de $\operatorname{Det} A(a,b,c)$ pour des paramètres tels que $b \neq c$.

d) Quelle est la valeur de $\operatorname{Det} A(a,b,c)$ lorsque $b = c$?

Indication : On peut calculer ce déterminant directement ou faire $b \to c$ dans l'expression obtenue dans la question c).

Exercice 11 **

On considère le déterminant

$$V_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_j & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ {\alpha_1}^r & \cdots & {\alpha_j}^r & \cdots & {\alpha_n}^r \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ {\alpha_1}^{n-1} & \cdots & {\alpha_j}^{n-1} & \cdots & {\alpha_n}^{n-1} \end{pmatrix}$$

pour $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

a) Que peut-on dire de ce déterminant $V_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ si on a $\alpha_i = \alpha_j$ pour une paire $i \neq j$?

b) On fixe des complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ deux à deux distincts. Prouver que l'application $t \mapsto V_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, t)$ est un polynôme de degré $n-1$ en t.

(i) Quelle est la valeur de ce polynôme en $t = 0$?

(ii) Quelles sont les racines de ce polynôme ?

Indication : que peut-on déduire des observations de la question précédente ?

(iii) *(Conclusion)* Comment s'écrit l'application $t \mapsto V_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, t)$?

c) Utiliser le résultat de la question précédente pour trouver par récurrence une formule calculant $V_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.