LICENCE $2^{\text{ÈME}}$ ANNÉE, PARCOURS MATHÉMATIQUES 2016-2017
M31, ALGÈBRE LINÉAIRE

TD3

Espaces supplémentaires

Exercice 1

On travaille dans l'espace $\mathbb{C}^3$.

a) Construire une base de l'hyperplan

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; x_1 = ix_2 - ix_3 \right\}.$$

On notera (u_1, u_2) les vecteurs de cette base.

b) Soit D la droite de $\mathbb{C}^3$ engendrée par le vecteur

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Prouver que $H \oplus D = \mathbb{C}^3$.

c) Déterminer la matrice de la projection sur H parallèlement à D dans la base (u_1, u_2, u_3), puis dans la base naturelle (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{C}^3$ en utilisant une formule de changement de base appropriée que l'on explicitera.

Exercice 2

On travaille dans l'espace $\mathcal{F}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On veut prouver que l'espace des fonctions paires $\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{F} \mid f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ et l'espace des fonctions impaires $\mathcal{A} = \{f \in F \mid f(x) = -f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{F}$.

a) Prouver $\mathcal{A} \cap \mathcal{S} = \{0_{\mathcal{F}}\}$.

b) Montrer que l'écriture

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

permet de décomposer chaque $f \in \mathcal{F}$ en somme d'une fonction $f_+ \in \mathcal{S}$ et d'une fonction $f_- \in \mathcal{A}$.

c) Conclure.

Exercice 3 *

On dit qu'un endomorphisme $\pi : E \to E$ d'un espace vectoriel E est un projecteur s'il vérifie $\pi^2 = \pi$, où on considère l'endomorphisme composé $\pi^2 = \pi \circ \pi$.

a) Observer que l'on a $\pi^2 = \pi \Leftrightarrow \pi \circ (\mathrm{Id} - \pi) = (\mathrm{Id} - \pi) \circ \pi = 0$. On note $(*)$ ces relations.

b) Prouver que l'on a $\mathrm{Ker}(\pi) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - \pi) = E$.
Indication : On partira de la relation évidente $v = (v - \pi(v)) + \pi(v)$ et on utilisera les relations (*) pour exprimer tout vecteur $v \in E$ comme somme d'un vecteur de $\mathrm{Ker}(\pi)$ *et d'un vecteur de* $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - \pi)$, *on vérifiera aisément que l'on a en outre* $\mathrm{Ker}(\pi) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - \pi) = \{0_E\}$.

c) Montrer que notre projecteur π s'identifie à la projection sur le sous espace $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - \pi)$ parallèlement au sous espace $K = \mathrm{Ker}(\pi)$.

Exercice 4 *

On dit qu'un endomorphisme $\phi : E \to E$ d'un espace vectoriel E est idempotent s'il vérifie $\phi^2 = \mathrm{Id}$. On suppose que l'on travaille sur un corps de scalaires $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2 (*i.e.* tel que $2 \neq 0$).

a) Observer que l'on a $\phi^2 = \mathrm{Id} \Leftrightarrow (\mathrm{Id}-\phi)\circ(\mathrm{Id}+\phi) = (\mathrm{Id}+\phi)\circ(\mathrm{Id}-\phi) = 0$, puis adapter les méthodes utilisées dans l'exercice précédent pour montrer que l'on a $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - \phi) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} + \phi) = E$.

b) Observer ensuite que notre idempotent ϕ s'identifie à la symétrie par rapport au sous espace $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - \phi)$ parallèlement au sous espace $G = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} + \phi)$.

Diagonalisation des endomorphismes

Exercice 5

Les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

sont-elles diagonalisables (sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$) ?

Exercice 6

Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients réels. Soit λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $\bar{\lambda}$ est également valeur propre de A et comparer les dimensions des espaces propres $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ et $\mathrm{Ker}(A - \bar{\lambda} I)$.

Exercice 7

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et l'application associée $\phi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, définie par $\phi_A(X) = AX$.

a) Quelles sont les valeurs propres et les dimensions des espaces propres de ϕ_A ?

b) Constater que ϕ_A est diagonalisable. Expliciter une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de ϕ_A et écrire la matrice de ϕ_A dans cette base.

c) Comment s'interprète géométriquement l'application $\phi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par la matrice A ?

Exercice 8

a) On travaille dans l'espace $\mathbb{R}_3[x]$ constitué des polynômes $P(x)$ tels que $\deg(P(x)) \leq 3$. Vérifier que l'application $\phi : P(x) \mapsto \phi\big(P(x)\big)$ telle que

$$\phi\big(P(x)\big) = (1-x^2)P'(x) + (1+3x)P(x).$$

définit une application linéaire $\phi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, puis expliciter la matrice A de cette application ϕ dans la base naturelle $(1, x, x^2, x^3)$ de $\mathbb{R}_3[x]$.

b) Déterminer le polynôme caractéristique de A. En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.

c) ** Retrouver le résultat précédent en résolvant les équations différentielles

$$\frac{y'}{y} = \frac{\lambda - (1+3x)}{1-x^2}, \qquad x \in]-1, 1[.$$

Exercice 9

On considère la matrice $n \times n$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et l'application associée $\phi_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, définie par $\phi_B(X) = BX$.

a) Quelle est la dimension du noyau de ϕ_B ?

b) Quelles sont les valeurs propres non nulles $\lambda \neq 0$ de ϕ_B ?
Indication : On pourra résoudre directement l'équation $BX = \lambda X \Leftrightarrow (B - \lambda I)X = 0$, pour un paramètre $\lambda \neq 0$, et donner la dimension de $\mathrm{Ker}(\phi_B - \lambda \mathrm{Id})$ selon la valeur de $\lambda \neq 0$. On peut aussi calculer directement le polynôme caractéristique de B, mais les calculs sont un peu plus compliqués.

c) L'application linéaire ϕ_B est-elle diagonalisable ?

Exercice 10 ⋆

Soit $P(t) = t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \cdots - a_0$ un polynôme à coefficients complexes. On suppose que les racines de $P(t)$, notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, sont distinctes deux à deux.

a) Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

puis montrer que A est diagonalisable.

Indication : On peut résoudre l'équation $AX = \lambda X$ directement, sans calculer le polynôme caractéristique de A.

b) Déduire de la question précédente l'expression du polynôme caractéristique de A. Retrouver le résultat obtenu en utilisant un développement selon la dernière ligne de A.