TD4

Compléments de cours

Exercice 1

On rappelle que la trace d'une matrice $n \times n$, soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est définie par la formule $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

a) Prouver que l'on a la relation $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ pour tout couple de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En déduire que l'on a relation $\mathrm{Tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$ pour toute matrice A, où P est une matrice inversible.

b) On considère la matrice $M_e^e(\phi)$ de l'endomorphisme ϕ dans une base e de l'espace E au départ et à l'arrivée. Montrer que l'on a la relation $\mathrm{Tr}(M_e^e(\phi)) = \mathrm{Tr}(M_f^f(\phi))$ lorsque l'on considère la matrice $M_f^f(\phi)$ de l'endomorphisme ϕ associée à un autre choix de base f de l'espace E.
Indication : On utilisera une formule de changement de base et le résultat de la question précédente.
Conclure que la définition de la trace d'un endomorphisme $\phi : E \to E$ d'un espace vectoriel E par $\mathrm{Tr}(\phi) := \mathrm{Tr}(M_e^e(\phi))$ a un sens.

c) Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant que le déterminant d'un endomorphisme ne dépend pas du choix de la base et de la relation

$$P_\phi(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \mathrm{Tr}(\phi) x^{n-1} + \cdots + \mathrm{Det}(\phi)$$

qui lie le polynôme caractéristique $P_\phi(x) = \mathrm{Det}(\phi - x\mathrm{Id})$ et la trace $\mathrm{Tr}(\phi)$.

Polynômes de matrices et d'endomorphismes — généralités

Exercice 2

a) Montrer que la matrice

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et expliciter des vecteurs propres de W formant une base de $\mathbb{C}^4$. On notera cette base (w_1, w_2, w_3, w_4).

Indication : L'équation $WX = \lambda X$ se résoud facilement et directement, sans passer par le polynôme caractéristique de W.

b) Soit $A = A(a_0, a_1, a_2, a_3)$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Observer que A s'écrit comme un polynôme en W (on calculera les puissances W^i). Comment s'écrit l'image de w_i par l'application $X \mapsto AX$? On utilisera l'observation précédente pour obtenir un résultat sans calcul.

c) Comment s'écrit la matrice de l'application $X \mapsto AX$ dans la base (w_1, w_2, w_3, w_4) ? Utiliser le résultat obtenu pour exprimer $\mathrm{Det}(A)$ sous forme factorisée.

d) * Généraliser l'exercice pour une matrice $n \times n$ de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_n & a_0 & a_1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \cdots & a_n & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & a_0 \end{pmatrix}.$$

Polynômes d'endomorphismes et diagonalisation

Exercice 3 (exercice de compréhension du cours)

On considère l'application linéaire $\phi = \phi_S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associée à la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Prouver que ϕ annule le polynôme $p(x) = x^3 + 1$. Dans la suite, on considère la factorisation $p(x) = f(x)g(x)$, où on pose $f(x) = x^2 - x + 1$ et $g(x) = x + 1$.

b) Expliciter une décomposition de Bezout $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$. En déduire la relation $u(\phi)f(\phi) + v(\phi)g(\phi) = \mathrm{Id}$.

c) En utilisant la relation précédente montrer que $\ker(f(\phi))$ et $\ker(g(\phi))$ sont en somme directe.

d) Montrer que l'on a $u(\phi) \cdot f(\phi)(\overrightarrow{w}) \in \ker(g(\phi))$ et $v(\phi) \cdot g(\phi)(\overrightarrow{w}) \in \ker(f(\phi))$, pour tout vecteur $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$, en utilisant que $f(\phi)g(\phi) = p(\phi) = 0$. Puis conclure que l'on a la relation $\ker(f(\phi)) \oplus \ker(g(\phi)) = \mathbb{R}^3$.

e) Prouver que l'endomorphisme $r(\phi) = u(\phi) \cdot f(\phi)$ définit en fait un projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur l'espace $\ker(g(\phi))$ parallèlement au sous espace $\ker(f(\phi))$, et que l'endomorphisme $s(\phi) = v(\phi) \cdot g(\phi) = \mathrm{Id} - r(\phi)$ définit, de façon symétrique, un projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur l'espace $\ker(g(\phi))$ parallèlement au sous espace $\ker(f(\phi))$. Expliciter ces projecteurs $r(\phi)$ et $s(\phi)$ pour l'endomorphisme $\phi = \phi_S$ considéré dans l'exercice.

Exercice 4

Soit X une matrice $n \times n$ à coefficients réels telle que $I + X + X^2 = 0$.

a) Montrer que X est diagonalisable (sur $\mathbb{C}$) et donner ses valeurs propres.

b) Que peut-on dire de la dimension n, du déterminant et de la trace de X ?

Exercice 5

Soient $\phi, \psi : E \to E$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n. On suppose que ϕ et ψ sont diagonalisables et commutent ($\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$). On note λ_i, $i = 1, \ldots, r$ les valeurs propres de ϕ et $E_{\lambda_i} = \{v \in E | \phi(v) = \lambda_i v\}$, $i = 1, \ldots, r$, les espaces propres correspondants.

a) Prouver que l'on a $\psi(E_{\lambda_i}) \subset E_{\lambda_i}$ pour tout $i = 1, \ldots, r$. On considère alors l'application $\psi_i : E_{\lambda_i} \to E_{\lambda_i}$ obtenue par restriction de $\psi : E \to E$ au sous espace $E_{\lambda_i} \subset E$.

b) Observer que ψ_i annule un polynôme scindé à racines simples. Conclure que chaque endomorphisme $\psi_i : E_{\lambda_i} \to E_{\lambda_i}$ est diagonalisable.

c) Déduire du résultat précédent que ϕ et ψ diagonalisent dans une base commune de vecteurs propres.

d) * Expliciter une base commune de vecteurs propres pour les endomorphismes $\phi = \phi_A$ et $\psi = \psi_B$ associés aux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

après avoir vérifié que ces matrices satisfont bien à la relation $AB = BA$.

Sous espaces caractéristiques et décomposition de Dunford [1]

Exercice 6

On considère l'application linéaire $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associée à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Qui devrait s'appeler «de Jordan–Chevalley», car les travaux de Dunford sont postérieurs à ceux de Jordan et Chevalley.

a) Prouver que l'on a la relation $(\phi - \mathrm{Id})^2 \cdot (\phi + \mathrm{Id})^2 = 0$, soit en calculant directement cet endomorphisme composé, soit en appliquant le théorème de Cayley-Hamilton.

b) Prouver que les espaces $F = \ker(\phi - \mathrm{Id})^2$ et $G = \ker(\phi + \mathrm{Id})^2$ sont de dimension 2 en explicitant une base de chacun de ces espaces. On notera (v_1, v_2) la base choisie pour l'espace F, et (w_1, w_2) la base choisie pour l'espace G. Comment justifier que (v_1, v_2, w_1, w_2) forme une base de $\mathbb{R}^4$?

c) Prouver que l'on a $\phi(F) \subset F$ et $\phi(G) \subset G$. Puis donner l'expression de la matrice de ϕ dans la base (v_1, v_2, w_1, w_2).

d) Soit $\sigma : E \to E$ l'application linéaire dont la matrice dans la base (v_1, v_2, w_1, w_2) s'écrit :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prouver que σ et $\rho = \phi - \sigma$ sont des endomorphismes qui commutent, et que ρ est nilpotente (on a $\rho^N = 0$ pour $N \gg 0$).

e) Donner l'expression de la matrice de σ^k dans la base (v_1, v_2, w_1, w_2), pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donner l'expression de la matrice de $\phi^k = (\sigma + \rho)^k$ dans la base (v_1, v_2, w_1, w_2) en utilisant la formule du binôme.

Exercice 7

On considère l'application linéaire $\phi : X \mapsto AX$ définie par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de ϕ. Déterminer une base des espaces caractéristiques de ϕ puis expliciter la matrice des composantes de la décomposition de Dunford de ϕ dans la base de $\mathbb{R}^4$ obtenue en assemblant les bases des espaces caractéristiques.

b) Déterminer la matrice de ϕ^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, dans la base considérée dans la question précédente.

Exercice 8

Déterminer le polynôme minimal de l'application linéaire $\psi : X \mapsto BX$ associée à la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

Soit $\phi : E \to E$ un endomorphisme nilpotent. On suppose que l'indice de nilpotence de ϕ est égal à $n = \dim(E)$. On fixe $u_1 \in E$ tel que $\phi^{n-1}(u_1) \neq 0_E$, et on pose $u_i = \phi^{i-1}(u_1)$ pour $i = 2, 3, \ldots, n$.

a) Montrer que la famille de vecteurs ainsi obtenue $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ forme une base de E et donner l'expression de la matrice de ϕ dans cette base.

b) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et l'application linéaire $\phi_A(X) = AX$ qui lui est associée.
Prouver que $N = A - 2I$ est une matrice nilpotente d'indice de nilpotence 3. Expliciter la base obtenue en applicant la construction de la question 1, pour un choix de vecteur $u_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $(A - 2I)^2 u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ laissé au soin de l'étudiant, puis expliciter la matrice de ϕ_A dans cette base.