SOLUTIONS DE L'EXAMEN

10 décembre 2018

[durée : 1 heure]

Exercice 1 (Variables)

Soit X une variable uniforme sur $[-1, 2]$.

a) Donner une densité et la fonction de répartition de X.

b) Calculer les espérances $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$. En déduire la variance $\mathbb{V}(X)$.

c) Pour $a \in [0, 1]$ on pose $Z = \max\{X, a\}$.

(i) Quelle est la loi de Z ?

(ii) Est-ce une variable à densité ? Si oui, en déterminer une.

(iii) Calculer la moyenne de Z. Pour quelle valeur de a la moyenne $\mathbb{E}(Z)$ est maximale ?

Solution :

a) La densité d'une variable uniforme sur $[a, b]$ est $\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(t)$, donc $\rho_X(t) = \frac{1}{3}\mathbb{1}_{[-1,2]}(t)$.
La fonction de répartition d'une variable uniforme sur $[a, b]$ est

$$t \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } t \leqslant a \\ \frac{t-a}{b-a}, & \text{si } t \in [a,b] \\ 1, & \text{si } t \geqslant b \end{cases}, \quad \text{ainsi dans notre cas} \quad F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leqslant -1 \\ \frac{t+1}{3}, & \text{si } t \in [-1,2] \\ 1, & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}.$$

b) On sait que l'espérance d'une variable uniforme sur $[a, b]$ est $\frac{a+b}{2}$, mais on peut la retrouver dans notre cas

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} t\,dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2}$$

De même on calcule

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} t^2\,dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\frac{8-(-1)}{3} = 1.$$

Ainsi

$$\mathbb{V}\left(X^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

c) Pour $a \in [0, 1]$ on pose $Z = \max\{X, a\}$?

(i) Comme $X \in [0, 2]$, nous avons $Z = \max\{X, a\} \in [a, 2] \implies F(t) \equiv 0$ pour $t < a$ et $F(t) \equiv 1$ pour $t \geqslant 2$. Ainsi pour connaître la loi de Z il suffit de connaître la fonction de répartition

$F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leqslant t)$ pour $t \in [a, 2]$. Mais pour $t \geqslant a$ nous avons $\max\{X, a\} \leqslant t \iff X \leqslant t$ et donc $F_Z(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) = F_X(t)$ pour $t \in [a, 2]$. Ainsi

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < a \\ \frac{t+1}{3}, & \text{si } t \in [a, 2] \\ 1, & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}.$$

(ii) La fonction $F_Z(t)$ n'est pas continue en a, donc Z n'a pas de densité.

(iii) $\mathbb{E}(Z) = \int_{\mathbb{R}} \max\{t, a\} \rho_X(t) dt = \frac{1}{3} \int_{-1}^{2} \max\{t, a\} dt = \frac{1}{3} \int_{-1}^{a} a dt + \frac{1}{3} \int_{a}^{2} t dt = \frac{a}{3}(a+1) + \frac{1}{3} \left[\frac{t^2}{2}\right]_a^2$. Ainsi après simplification nous trouvons $\mathbb{E}(Z) = \frac{2}{3} + \frac{a}{3} + \frac{a^2}{6}$, qui est croissante sur $[0, 1]$ (qui était prévisible), donc est maximale pour $a = 1$, et elle vaut dans ce cas $\mathbb{E}(Z) = \frac{7}{6}$.

Exercice 2 (Événements)

On dispose d'un dé bleu et d'un dé rouge *équilibrés* et on effectue trois lancers de cette paire de dés.

a) Donner un ensemble Ω qui muni de la loi uniforme modélise cet événement aléatoire.

b) Quelle est la probabilité qu'on obtienne au moins une paire[1] lors des trois lancés ?

c) Quelle est la probabilité que lors de chacun des trois lancés la différence des deux dés soit de 1 ?

d) Est-ce que les événements « lors du premier lancé la somme des deux dés est paire » et « lors du premier lancé la différence des deux dés est impaire » sont indépendants ?

Solution :

a) Soit $\mathcal{S} = \{1, \ldots, 6\}$ qui encode le résultat d'un dé lors d'un lancé. Alors $\mathcal{S}^2 = \{(r_1, b_1) \mid r_1, b_1 \in \mathcal{S}\}$ encode le résultat de deux dés lors d'un lancé[2]. Et finalement

$$\Omega = (\mathcal{S}^2)^3 = \{((r_1, b_1), (r_2, b_2), (r_3, b_3)) \mid r_i, b_i \in \mathcal{S}\}$$

modélise les trois lancés des deux dés, avec $|\Omega| = 6^6 = 46656$.

b) Soit A_i l'événement « c'est une paire lors du i-ème lancé ». Les A_i sont indépendants car les lancés le sont. Alors $\mathbb{P}(A_i) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ et donc $\mathbb{P}(\overline{A_i}) = \frac{5}{6}$. Ainsi $\mathbb{P}(\text{« au moins une paire »}) = 1 - \mathbb{P}(\text{« aucune paire »}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} \approx 42\%$.

c) Soit D_i l'événement « les deux dés diffèrent de 1 lors du i-ème lancé ». Les D_i sont indépendants car les lancés le sont. Comme il y a 10 résultats où les deux dés diffèrent de 1, $\mathbb{P}(D_i) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$. Ainsi $\mathbb{P}(\text{« les dés diffèrent de 1 les trois fois »}) = \left(\frac{5}{18}\right)^3 = \frac{125}{5832} \approx 2\%$.

d) Comme A : « la somme des deux dés est paire » $\iff$ « les deux dés ont la même parité », et B : « la différence des deux dés est impaire » $\iff$ « les deux dés n'ont pas la même parité », ces deux événements sont complémentaires. Et comme ils sont possibles, ils sont dépendants : $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

1. « paire » = les deux dés ont la même valeur
2. On a choisi « r » pour « rouge » et « b » pour « bleu ».