TD1 - dénombrement, probabilité et indépendance

Probabilités élémentaires

Exercice 1

On tire, une à une, sans les remettre dans le paquet, cinq cartes dans un jeu de 52 cartes ; chaque succession de cartes ainsi tirées s'appelle une main.

a) Quel est l'espace de probabilité que vous considérez ?

b) Quelle est la probabilité qu'une main soit : une « couleur » (ou « flush ») [1] ? une « quinte flush » ? un « carré » ? un « full » [2] ?

Exercice 2

Soit $p \geqslant 4$. On construit un mot de p lettres en choisissant au hasard des lettres dans un alphabet constitué de 4 lettres différentes $\{A, T, C, G\}$.

a) Décrire l'espace de probabilité associé à cette expérience.

b) Quelle est la probabilité que dans le mot obtenu les 4 lettres de l'alphabet soient présentes ?

Exercice 3 (En attendant le bus)

Un arrêt de bus est desservi tous les quart d'heures à partir de 7h du matin (inclus). Un passager arrive à l'arrêt à un instant aléatoire de [7h10 ; 7h40] muni de la loi uniforme.

Quelle est la probabilité qu'il attende moins de 5 min pour un bus ? Plus de 10 min ?

Exercice 4 (Temps d'attente de Pierre et Paul)

Pierre et Paul ont rendez-vous entre 12h et 12h30. Dans un premier temps, on discrétise le temps et on modélise cette situation par

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 30\}^2,$$

le tirage $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ représentant la situation où Pierre arrive ω_1 minutes après 12h et où Paul arrive ω_2 minutes après 12h. On munit Ω de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et on fait l'hypothèse d'équiprobabilité.

a) Quelle est la probabilité de l'événement « Pierre et Paul arrivent en même temps » ?

1. Main composée que d'une des 4 couleurs : ♠, ♡, ♣ et ♢.
2. L'association d'un « brelan » *(3 cartes identiques)* et d'une « paire » *(2 cartes identiques)*.

b) Calculer la probabilité de l'événement « Pierre attend plus de 5 minutes » :

$$\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \omega_2 > \omega_1 + 5\}.$$

Quelle est celle de l'événement « Pierre attend entre 5 et 15 minutes » (ces deux valeurs extrêmes étant exclues) ?

c) Quelle est la probabilité que Pierre et Paul arrivent avec k minutes de différence (pour $k \in \{0, \ldots, 29\}$) ?

d) Quelle autre modélisation aurait-on pu choisir ? Est-ce que cela aurait changé les probabilités des événements considérés ?

Nous considérons maintenant que le temps est continu. Nous choisissons la modélisation $\Omega = [0, 30]^2$, avec probabilité uniforme. Le tirage $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ représente la situation où Pierre arrive ω_1 minutes après 12h et Paul ω_2 minutes après 12h.

e) Calculer la probabilité de l'événement : « Pierre et Paul arrivent en même temps ».

f) Faire un dessin représentant les événements : « Pierre arrive avant Paul », « Pierre attend plus de 5 minutes ».

g) Calculer la probabilité de l'événement : « Pierre attend plus de 5 minutes », « Pierre attend entre 5 et 15 minutes ».

Exercice 5 (Découpe de spaghetti)

On découpe « au hasard », un segment de longueur l en trois morceaux. On veut savoir si on peut tracer un triangle avec les trois morceaux.

a) Décrire d'espace de probabilité Ω associé, ainsi que la tribu et la probabilité.

b) On modélise le spaghetti par le segment $[0, l]$. Le point où l'on coupe le spaghetti pour la première fois est noté x, le point où l'on coupe le spaghetti pour la deuxième fois y. On peut avoir $x > y$.

c) Quand peut-on faire un triangle avec les trois morceaux ?

d) On peut représenter le couple (x, y) par un point de $\mathbb{R}^2$. Représenter sur un dessin les couples qui permettent de faire un triangle.

e) Calculer la probabilité de pouvoir faire un triangle avec les trois morceaux du spaghetti.

Indépendance et conditionnement

Exercice 6

On lance deux dés et on considère les événements :

$$A = \{\text{le résultat du premier dé est impair}\},$$
$$B = \{\text{le résultat du second dé est pair}\},$$
$$C = \{\text{les résultats des deux dés sont de même parité}\}.$$

Étudier l'indépendance deux à deux des événements A, B et C, puis l'indépendance mutuelle (indépendance de la famille) A, B, C.

Exercice 7

Pour chacune des assertions suivantes, donner soit une preuve, soit un contre-exemple.

a) Si A et B sont deux événements indépendants et incompatibles alors l'un des deux événements au moins est de probabilité nulle.

b) Si l'un des événements A ou B est de probabilité nulle alors A et B sont indépendants et incompatibles.

c) Si un événement A est indépendant d'un événement B et si C est un événement tel que $C \subset B$ alors A est indépendant de C.

d) Si un événement A est indépendant d'un événement B et d'un événement C, alors il est indépendant de $B \cup C$.

Exercice 8

On cherche une girafe qui, avec une probabilité $p/7$, se trouve dans l'un des quelconques des 7 étages d'un immeuble, et avec probabilité $1 - p$ hors de l'immeuble. On a exploré en vain les 6 premiers étages. Quelle est la probabilité qu'elle habite au septième étage ?

Exercice 9

Un joueur de tennis a une probabilité de 40% de passer sa première balle de service. S'il échoue, sa probabilité de passer sa deuxième balle est 70%. Lorsque sa première balle de service passe, sa probabilité de gagner le point est 80%, tandis que sa probabilité de gagner le point lorsqu'il passe sa deuxième balle de service n'est plus que 50%.

a) Calculer la probabilité qu'il fasse une double faute.

b) Calculer la probabilité qu'il perde le point sur son service.

c) Sachant qu'il a perdu le point, quelle est la probabilité que ce soit sur une double faute ?

Exercice 10 (Une inégalité injustement méconnue)

Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on note A un événement quelconque et B un événement tel que $0 < \mathbb{P}(B) < 1$.

a) Montrez que

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leqslant \frac{1}{4}|\mathbb{P}(A \mid B) - \mathbb{P}(A \mid B^c)|. \qquad \circledast$$

Indication : Commencez par exprimer $\mathbb{P}(A \mid B) - \mathbb{P}(A \mid B^c)$ en fonction des seules probabilités $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$.

b) Dans quels cas $\circledast$ est-elle une égalité ?

c) Que donne l'inégalité $\circledast$ lorsque $A \subset B$?

Exercice 11 (Indépendance)

Peut-il exister n événements indépendants de même probabilité p dont la réunion soit l'espace Ω tout entier ?

Exercice 12 (Loi de succession de Laplace)

On dispose de $(N+1)$ boîtes numérotées de 0 à N. La k-ième boîte contient k boules rouges et $(N-k)$ boules blanches. On choisit une boîte au hasard et on fait, dans cette boîte, n tirages avec remise.

a) Sachant que le tirage est effectué dans la k-ième boîte, quelle est la probabilité de tirer n fois de suite une boule rouge ?

b) Sachant qu'on a tiré une boule rouge, quelle est la probabilité que le tirage a été effectué dans la k-ième boîte ?

c) Démontrer que la probabilité de tirer n fois de suite une boule rouge est :

$$\frac{1 + 2^n + 3^n + \cdots + N^n}{N^n(N+1)}$$

et calculer sa limite quand N tend vers l'infini.

Indication : Utiliser la définition de l'intégral de Riemann pour déterminer la limite.

d) Calculer la probabilité $p_{N,n}$ de tirer une boule rouge la $(n+1)^{\text{ième}}$ fois, sachant qu'on vient de tirer n boules rouges de suite. Quelle est sa limite quand N tend vers l'infini ?