# TD3 - Lois et moments

## Lois usuelles

**Exercice 1** (La loi uniforme)

Soit $X$ une variable uniforme sur $[0,\pi]$ et $a \in [0,\pi]$.

**a)** Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$. En déduire $\mathbb{V}(X)$.

**b)** Calculer $\mathbb{E}(\sin(X))$ et $\mathbb{E}(\cos(X))$.

**c)** Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = \min\{X, a\}$ ?

**d)** Admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

**e)** Que vaut cette espérance si $a = 0$ ? $a = \pi$ ? Est-ce que vous auriez pu trouver ces deux résultats autrement ?

**Exercice 2** (Opérations sur les variables à densité)

Soit $X$ une variable à densité $f_X$.

**a)** Montrer que $X + m$ est à densité et en déterminer une.

**b)** Exprimer la moyenne et la variance de $X + m$ en fonction de celles de $X$.

**c)** Montrer que $\sigma X$ est à densité et en déterminer une.

**d)** Exprimer la moyenne et la variance de $\sigma X$ en fonction de celles de $X$.

**Exercice 3** (Moments de la loi exponentielle)

*On dit que $X$ suit une* loi exponentielle *de paramètres $\lambda$, et on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, si $X$ admet comme densité*

$$\rho_X(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t).$$

**a)** Montrer que $\rho_X$ est une densité et déterminer la fonction de répartition $F_X$ de $X$.

**b)** Calculer la moyenne $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathbb{V}(X)$ de $X$.

**c)** Calculer $\mathbb{E}\left(e^{X/2}\right)$ lorsqu'elle existe.

**d)** On pose $I_n = \mathbb{E}(X^n)$. Établir une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n-1}$.

**e)** En déduire l'expression de $\mathbb{E}(X^n)$.

**Exercice 4** (Moments de la loi normale)

*On dit que $X$ suit une* loi normale *de paramètres $m$ et $\sigma$, et on note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, si $X$ admet comme densité*

$$\rho_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

**a)** Montrer que $\rho_X(t)$ est bien une densité de probabilité.

Soit $X$ une variable aléatoire normale centrée réduite, c.-à-d. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

**b)** Que valent $\mathbb{E}\left(X^{2n+1}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$ ?

**c)** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \mathbb{E}\left(X^{2n}\right)$. Montrer que $c_n = (2n-1)c_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire une formule explicite pour $\mathbb{E}\left(X^{2n}\right)$.

Soit $X$ une variable aléatoire normale de paramètres $m$ et $\sigma$.

**d)** Quelle sont la moyenne et la variance de $X$ ?

**Exercice 5**

**a)** Montrer que la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \mathbb{1}_{]-1,1[}(x),$$

définit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

**b)** Donner la fonction de répartition et l'espérance (si elle existe) d'une variable aléatoire $X$ de densité $f$ sur $\mathbb{R}$.

**c)** Comment simuler une telle variable aléatoire ?

**d)** Si $T$ suit une loi de Cauchy, montrer que la variable aléatoire $Z = \dfrac{1-T^2}{1+T^2}$ a pour densité $f$. On rappelle que la loi de Cauchy a pour densité :

$$f(t) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$