Solutions du devoir surveillé

9 mars 2024

[durée : 2 heures]

Exercice 1

Sur l'ensemble $\Omega = \{-2,-1,0,1,2\}$ on note $\mathcal{F}$ la plus petite tribu qui contient $\{-2,-1,0\}$ et $\{0,1,2\}$.

a) Expliciter $\mathcal{F}$ en donnant la liste de ses éléments (sans justification).

b) On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. Parmi ces trois fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, lesquelles sont $\mathcal{F}$-mesurables ? Justifier vos réponses.

(i) la fonction nulle : $\forall\omega \in \Omega,\ f_0(\omega) = 0$;

(ii) la fonction identité : $\forall\omega \in \Omega,\ f_1(\omega) = \omega$;

(iii) la fonction signe : $\forall\omega \in \Omega,\ f_2(\omega) = -1$ si $\omega < 0$ et $f_2(\omega) = 1$ si $\omega \geqslant 0$.

Solution :

a) $\mathcal{F} = \big\{\emptyset, \{-2,-1\}, \{0\}, \{1,2\}, \{-2,-1,0\}, \{0,-2,-1\}, \{-2,-1,1,2\}, \Omega\big\}$.

Justification non exigée. Montrons que $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par A_1 et A_2. Il est facile de vérifier que $\mathcal{F}$ est stable par complémentaire et union (dénombrable), donc $\mathcal{F}$ est une tribu qui contient $A_1 = \{-2,-1,0\}$ et $A_2 = \{0,1,2\}$. Ainsi il reste à montrer que les quatre autres ensembles non triviaux sont engendrés par A_1 et A_2 : $\{-2,-1\} = A_1 \cap \overline{A_2}$, $\{1,2\} = A_2 \cap \overline{A_1}$, $\{0\} = A_1 \cap A_2$ et $\{-2,-1,1,2\} = \overline{A_1 \cap A_2}$.

(i) La fonction nulle est mesurable, car elle est constante. Toute fonction constante est mesurable, car l'image réciproque de tout ensemble (borélien) est Ω ou $\emptyset$.

(ii) La fonction identité n'est pas mesurable, car l'image réciproque de $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est $\{1\}$ qui n'est pas dans $\mathcal{F}$.

(iii) La fonction signe est mesurable car l'image réciproque de tout ensemble (borélien) A est dans $\mathcal{F}$:

$$f_2^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F} & \text{si } -1 \notin A \text{ et } 1 \notin A, \\ \{-2,-1\} \in \mathcal{F} & \text{si } -1 \in A \text{ et } 1 \notin A, \\ \{0,1,2\} \in \mathcal{F} & \text{si } -1 \notin A \text{ et } 1 \in A, \\ \Omega \in \mathcal{F} & \text{si } -1 \in A \text{ et } 1 \in A. \end{cases}$$

Exercice 2

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

a) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que si U est borné alors $\lambda(U) < +\infty$.
La réciproque est-elle vraie ? *Vous pouvez considérer des ouverts centrés en n pour $n \in \mathbb{N}$.*

b) Soit $\varepsilon > 0$. Construire un ouvert U dense dans $\mathbb{R}$ de sorte que $\lambda(U) \leqslant \varepsilon$.
Vous pouvez considérer des ouverts centrés en q pour $q \in \mathbb{Q}$.

c) Soit A un borélien de $\mathbb{R}$. Montrer que si A contient un ouvert non vide, alors $\lambda(A) > 0$.
Si $B = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, que vaut $\lambda(B)$? B peut-il contenir un ouvert non vide ?

Solution : *(Il s'agit de l'exercice 8 de la feuille 3, déjà fait en TD.)*

a) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Si U est borné alors il existe $M > 0$ tel que $U \subset [-M, M]$. Par la monotonie de la mesure on obtient $\lambda(U) \leqslant \lambda([-M, M]) = 2M < +\infty$.
La réciproque n'est pas vraie, car il existe des ouverts de mesure finie qui ne sont pas bornés. Par exemple, $U = \bigcup_{n\geqslant 1}]n - 2^{-n}, n + 2^{-n}[$ est un ouvert de mesure finie $\lambda(U) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \lambda\big(]n - 2^{-n}, n + 2^{-n}[\big) = \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n+1} = 2$, mais n'est pas borné, car $\mathbb{N}^*$ est inclus dans U.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, ordonnons-le dans une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $U = \bigcup_{n\geqslant 0}]q_n - \varepsilon\, 2^{-n-2}, q_n + \varepsilon\, 2^{-n-2}[$. Alors U est un ouvert dense dans $\mathbb{R}$, car il contient $\mathbb{Q}$, et $\lambda(U) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \lambda\big(]q_n - \varepsilon\, 2^{-n-2}, q_n + \varepsilon\, 2^{-n-2}[\big) = \sum_{n\geqslant 0} \varepsilon\, 2^{-n-1} = \varepsilon$.

c) Soit A un borélien de $\mathbb{R}$. Si A contient O un ouvert non vide, alors il existe $x \in O$ et $\varepsilon > 0$, tels que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset O \subset A$. Donc $0 < 2\varepsilon \leqslant \lambda(O) \leqslant \lambda(A)$.
Vu que $\lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$, comme ensemble dénombrable, nous avons $\lambda(B) = 1 - 0 = 1$, mais B ne peut pas contenir un ouvert non vide, car $\mathbb{Q}$ rencontre tout ouvert non vide.
Ainsi la réciproque « un borélien de mesure positive contient un ouvert non vide » est fausse.

Exercice 3

Soient deux réels $\mu > 0$ et $p \in]0,1[$. Dans une banque, le nombre de chèques émis par les clients en un jour est une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$. Pour chaque chèque émis, la probabilité que ce chèque soit sans provision est p.

On appelle Y le nombre de chèques émis sans provision lors d'une journée.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver $\mathbb{P}(Y = k \mid X = n)$ et $\mathbb{P}(X - Y = l \mid X = n)$ suivant les valeurs de $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$.

b) Utiliser la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de Y et celle de $X - Y$.

c) Calculer $\mathbb{P}(X - Y = l \mid Y = k)$ en fonction de k et l. Les variables $X - Y$ et Y sont-elles indépendantes ?

Solution : *(Cet exercice est fortement inspiré de l'exercice 12 de la feuille 4, fait en TD.)*

a) L'entier n est fixé. On sait que n chèques ont été émis aujourd'hui. On doit trouver la probabilité que k chèques soient sans provision. Elle est nulle si $k > n$ puisqu'il ne peut pas y avoir plus de chèques sans provision que de chèques en tout :

$$\mathbb{P}(Y = k \mid X = n) = 0 \quad \text{si} \quad k > n.$$

Si $0 \leq k \leq n$ la probabilité que k chèques soient sans provision est la probabilité qu'il y ait k succès (le « succès » est le fait d'être sans provision) parmi n expériences (chaque chèque représente une expérience aléatoire) qui ont toutes la même probabilité de succès p (la probabilité pour un chèque d'être sans provision). Si on suppose les chèques indépendants, ce qui est raisonnable, on est exactement dans la situation d'un schéma de Bernoulli : la probabilité qu'il y ait k succès est donc

$$\mathbb{P}(Y = k \mid X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Pour trouver la loi du nombre $X - Y$ de chèques avec provision sachant qu'il y a $X = n$ chèques émis, on fait de même en remplaçant la probabilité p qu'un chèque soit sans provision par la probabilité $q = 1 - p$ qu'un chèque soit avec provision. Ainsi

$$\mathbb{P}(X - Y = l \mid X = n) = \binom{n}{k} (1-p)^l p^{l-k} \quad \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant l.$$

b) Il peut y avoir 0 ou 1 ou 2 ou…chèques sans provision, donc l'ensemble des valeurs que Y peut prendre est $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Déterminer la loi de Y consiste à déterminer $\mathbb{P}(Y = k)$ pour chaque valeur k que peut prendre Y. On fixe un k (réécrire avec $k = 5$ si on a besoin d'une valeur numérique pour bien voir que k est fixé) et on utilise la formule de conditionnement par tous les cas possibles :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k \mid X = n)\ \mathbb{P}(X = n)$$

(pour $n < k$ on a vu que la proba conditionnelle est nulle)

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k \mid X = n)\ \mathbb{P}(X = n)$$

(pour $n \geq k$ la proba conditionnelle a une forme binomiale)

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\ \mathbb{P}(X = n)$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!\ (n-k)!}\ p^k (1-p)^{n-k}\ \mathbb{P}(X = n).$$

La variable X qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ signifie que $\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!\ (n-k)!}\ p^k(1-p)^{n-k}\ e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

(on simplifie par $n!$ et on sort ce qui ne dépend pas de l'indice de sommation n)

$$= \frac{1}{k!}\ p^k\ e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!}\ (1-p)^{n-k}\ \lambda^n.$$

Pour que la somme démarre à 0, on fait le changement d'indice en $i = n - k$ donc $n = i + k$:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{k!}\ p^k\ e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}\ (1-p)^i\ \lambda^{i+k}$$

(évidemment $\lambda^{i+k} = \lambda^i\lambda^k$)

$$= \frac{1}{k!}\ p^k\ \lambda^k\ e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}\ (1-p)^i\ \lambda^i$$

(tout aussi évidemment $\lambda^k p^k = (\lambda p)^k$ et pareil pour $(\lambda(1-p))^i$)

$$= \frac{(\lambda p)^k}{k!}\ e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^i}{i!}$$

(à ce stade on reconnaît la série exponentielle et c'est gagné)

$$= \frac{(\lambda p)^k}{k!}\ e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\ e^{-\lambda p}$$

Moralité : le nombre Y de chèques sans provision suit la loi de Poisson de paramètre λp.

Pour trouver la loi du nombre $X - Y$ de chèques avec provision, on peut faire la même chose : écrire les probabilités conditionnelles des $X - Y = l$ sachant $X = n$, calculer $\mathbb{P}(X - Y = l)$ par la formule de conditionnement par tous les cas possibles, enlever les termes nuls, etc. On s'aperçoit très vite que ça revient à refaire exactement tout ce qui a été fait ci-dessus en remplaçant la probabilité p qu'un chèque soit sans provision par la probabilité $1 - p$ qu'un chèque soit avec provision. Sans surprise, après le même calcul avec $1 - p$ au lieu de p, on trouve la même loi avec $1 - p$ au lieu de p.

Moralité : Le nombre $X - Y$ de chèques avec provision suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.

c) Les variables $X - Y$ et Y sont-elles indépendantes ?

L'argument « $X - Y$ n'est pas indépendant de Y parce que dans l'écriture de $X - Y$ il y a Y » ne résiste pas au lavage : la définition de l'indépendance dans le cours n'est pas basée sur le nom des v.a. La définition, c'est que $X - Y$ et Y sont indépendantes si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(\{Y = k\} \cap \{X - Y = l\}) = \mathbb{P}(Y = k)\ \mathbb{P}(X - Y = l).$$

On fixe un k et un l dans $\mathbb{N}$ et on regarde si l'égalité a lieu. C'est pareil d'avoir k chèques sans provision et l chèques avec provision, ou k chèques sans provision et $k+l$ chèques en tout donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\{Y=k\} \cap \{X-Y=l\}\right) &= \mathbb{P}\left(\{Y=k\} \cap \{X=k+l\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Y=k \mid X=k+l\right)\ \mathbb{P}\left(X=k+l\right).\end{aligned}$$

Comme $k+l \geq k$, ça donne

$$\mathbb{P}\left(\{Y=k\} \cap \{X-Y=l\}\right) = \binom{k+l}{k} p^k (1-p)^{k+l-k}\ e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+l}}{(k+l)!}$$

(le $(k+l)!$ est au numérateur et au dénominateur, on simplifie)

$$= \frac{1}{k!\ l!} p^k (1-p)^l\ e^{-\lambda}\ \lambda^{k+l}$$

Il faut regarder si ceci est égal à $\mathbb{P}(Y=k)\ \mathbb{P}(X-Y=l)$. On sait que $\mathbb{P}(X-Y=l) = \frac{(\lambda(1-p))^l}{l!}\ e^{-\lambda(1-p)}$ puisque $X-Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$. Ainsi

$$\mathbb{P}(Y=k)\ \mathbb{P}(X-Y=l) = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\ e^{-\lambda p}\ \frac{(\lambda(1-p))^l}{l!}\ e^{-\lambda(1-p)}$$

(on simplifie et on regroupe)

$$= \frac{\lambda^{k+l}\ p^k\ (1-p))^l}{k!\ l!}\ e^{-\lambda}.$$

On constate que la probabilité de l'intersection et le produit des probabilités sont égales pour tout k et l de $\mathbb{N}$, donc $X-Y$ et Y sont indépendantes !

Est-ce étonnant ? Ça signifie que le nombre de chèques avec provision faits chaque jour est indépendant du nombre de chèques sans provision faits chaque jour. Comme les clients de la banque agissent indépendamment sans tenir compte des chèques rédigés par les autres clients, c'est normal que le nombre de chèques avec provision soit indépendant du nombre de chèques sans provision.

Exercice 4

Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$ et de loi uniforme sur $]0,1[$. On pose

$$Z \coloneqq \frac{1-X}{X}.$$

a) Calculer explicitement la fonction de répartition de la variable aléatoire positive Z. Dessiner son graphe.

b) La loi de Z est-elle à densité ? Si oui, la calculer et dessiner son graphe.

c) Expliquer, si possible sans calcul, pourquoi Z et $1/Z$ ont *même loi*.

d) On brise une tige de longueur 1 en choisissant au hasard le point de rupture suivant une loi uniforme sur $]0,1[$. Quelle est la probabilité que l'un des deux morceaux soit plus de deux fois plus long que l'autre ?

Indication : Vous pouvez faire cette question en utilisant les questions précédentes avec X la longueur du morceau gauche, mais vous pouvez aussi la faire directement.

Solution :

On note F_Z la fonction de répartition de Z.

a) On remarque que Z prend des valeurs positives donc si $z < 0$, $F(z) = 0$. Soit donc $z \geqslant 0$. Comme $X \geqslant 0$ et $1 + z > 0$ pour $z \geqslant 0$, nous avons $F_Z(z) = \mathbb{P}\left(\frac{1-X}{X} \leqslant z\right) = \mathbb{P}\left(1 \leqslant X(1+z)\right) = \mathbb{P}\left(X \geqslant \frac{1}{1+z}\right) = 1 - F_X(\frac{1}{1+z})$. Et comme $\frac{1}{1+z} \in]0,1]$ pour $z \geqslant 0$, on trouve $F_Z(z) = 1 - \frac{1}{1+z} = \frac{z}{1+z}$. Et donc finalement

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0, \\ \frac{z}{1+z} & \text{si } z \geqslant 0. \end{cases}$$

b) La fonction F_Z est continue, de classe C^1 par morceaux, donc Z est à densité $f = F_Z'$ sur $\mathbb{R}^*$, ainsi, en choisissant arbitrairement la valeur en 0, on trouve une densité

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leqslant 0, \\ \frac{1}{(1+z)^2} & \text{si } z > 0. \end{cases}$$

c) On a $\frac{1}{Z} = \frac{X}{1-X} = \frac{1-(1-X)}{1-X}$. Or, $1 - X$ est aussi de loi uniforme sur $]0,1[$, donc Z et $\frac{1}{Z}$ ont même loi.

d) Soit X le point de rupture, alors les deux morceaux sont de longueur X et $1 - X$. La condition « l'un des deux morceaux est plus de deux fois plus long que l'autre » se traduit par la réunion des deux conditions incompatibles : $X \geqslant 2(1 - X)$ ou $(1 - X) \geqslant 2X$.

Méthode I. On cherche $\mathbb{P}\left((X \geqslant 2(1-X)) \sqcup (1 - X \geqslant 2X)\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1-X}{X} \leqslant \frac{1}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\frac{X}{1-X} \leqslant \frac{1}{2}\right) = 2\mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{1}{2}\right)$, puisque, d'après la question précédente, Z et $\frac{1}{Z}$ ont même loi. Ainsi la probabilité que l'un des deux morceaux soit plus de deux fois plus long que l'autre est $2F_Z(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$.

Méthode II. On peut aussi voir, sans utiliser Z, que $X \geqslant 2(1 - X) \iff 3X \geqslant 2 \iff X \geqslant \frac{2}{3}$ et $1 - X \geqslant 2X \iff 3X \leqslant 1 \iff X \leqslant \frac{1}{3}$. Ainsi la probabilité recherchée est $\mathbb{P}\left(X \geqslant \frac{2}{3}\right) + \mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.