DEVOIR SURVEILLÉ

9 mars 2024

[durée : 2 heures]

⚠ *Les documents et les objets électroniques sont interdits. Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être justifiées.*

Exercice 1

Sur l'ensemble $\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ on note $\mathcal{F}$ la plus petite tribu qui contient $\{-2, -1, 0\}$ et $\{0, 1, 2\}$.

a) Expliciter $\mathcal{F}$ en donnant la liste de ses éléments (sans justification).

b) On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. Parmi ces trois fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, lesquelles sont $\mathcal{F}$-mesurables ? Justifier vos réponses.

(i) la fonction nulle : $\forall \omega \in \Omega,\ f_0(\omega) = 0$;

(ii) la fonction identité : $\forall \omega \in \Omega,\ f_1(\omega) = \omega$;

(iii) la fonction signe : $\forall \omega \in \Omega,\ f_2(\omega) = -1$ si $\omega < 0$ et $f_2(\omega) = 1$ si $\omega \geqslant 0$.

Exercice 2

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

a) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que si U est borné alors $\lambda(U) < +\infty$.
La réciproque est-elle vraie ? *Vous pouvez considérer des ouverts centrés en n pour $n \in \mathbb{N}$.*

b) Soit $\varepsilon > 0$. Construire un ouvert U dense dans $\mathbb{R}$ de sorte que $\lambda(U) \leqslant \varepsilon$.
Vous pouvez considérer des ouverts centrés en q pour $q \in \mathbb{Q}$.

c) Soit A un borélien de $\mathbb{R}$. Montrer que si A contient un ouvert non vide, alors $\lambda(A) > 0$.
Si $B = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, que vaut $\lambda(B)$? B peut-il contenir un ouvert non vide ?

T.S.V.P.

Exercice 3

Soient deux réels $\mu > 0$ et $p \in]0,1[$. Dans une banque, le nombre de chèques émis par les clients en un jour est une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$. Pour chaque chèque émis, la probabilité que ce chèque soit sans provision est p.

On appelle Y le nombre de chèques émis sans provision lors d'une journée.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver $\mathbb{P}(Y = k \mid X = n)$ et $\mathbb{P}(X - Y = l \mid X = n)$ suivant les valeurs de $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$.

b) Utiliser la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de Y et celle de $X - Y$.

c) Calculer $\mathbb{P}(X - Y = l \mid Y = k)$ en fonction de k et l. Les variables $X - Y$ et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4

Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$ et de loi uniforme sur $]0,1[$. On pose

$$Z := \frac{1 - X}{X}.$$

a) Calculer explicitement la fonction de répartition de la variable aléatoire positive Z. Dessiner son graphe.

b) La loi de Z est-elle à densité ? Si oui, la calculer et dessiner son graphe.

c) Expliquer, si possible sans calcul, pourquoi Z et $1/Z$ ont *même loi.*

d) On brise une tige de longueur 1 en choisissant au hasard le point de rupture suivant une loi uniforme sur $]0,1[$. Quelle est la probabilité que l'un des deux morceaux soit plus de deux fois plus long que l'autre ?

Indication : Vous pouvez faire cette question en utilisant les questions précédentes avec X la longueur du morceau gauche, mais vous pouvez aussi la faire directement.