Solutions de l'examen

18 avril 2024

[durée : 3 heures]

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre α et que Y suit la loi géométrique de paramètre β, avec $\alpha, \beta \in]0,1[$. On note

$$Z \coloneqq \min(X, Y).$$

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X > k)$ et $\mathbb{P}(Y > k)$.

b) Calculer $\mathbb{P}(Z > k)$, puis en déduire la loi de Z. Identifier cette loi.

Solution :

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(X > k) = \sum_{j>k} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j \geqslant k+1} \alpha(1-\alpha)^{j-1} = \alpha(1-\alpha)^k \frac{1}{1-(1-\alpha)} = (1-\alpha)^k,$$

en utilisant la somme de la série géométrique de premier terme $\alpha(1-\alpha)^k$ et de raison $(1-\alpha) \in]0,1[$. De même, on trouve

$$\mathbb{P}(Y > k) = (1-\beta)^k.$$

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(Z > k) = \mathbb{P}(X > k, Y > k) = \mathbb{P}(X > k) \times \mathbb{P}(Y > k) = ((1-\alpha)(1-\beta))^k$$

par indépendance de X et Y. En posant $\gamma \coloneqq \alpha + \beta - \alpha\beta$ on trouve $\mathbb{P}(Z > k) = (1-\gamma)^k$. Ainsi, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z > k-1) - \mathbb{P}(Z > k) = \gamma(1-\gamma)^{k-1}.$$

Comme $Z = \min(X, Y) \geqslant 1$, vu que $X \geqslant 1$ et $Y \geqslant 1$, ceci signifie que Z suit une loi géométrique de paramètre γ. On vérifie aussi que $\gamma \in]0,1[$, puisque $\alpha, \beta \in]0,1[$.

Exercice 2

Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^*$. Une variable aléatoire X à valeurs dans $]0, +\infty[$ est dite suivre une loi *log-normale* de paramètres (μ, σ^2) si $Y = \log X$ suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On note $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2)$ la loi log-normale de paramètres (μ, σ^2).

a) Exprimer X à l'aide d'une variable Z (à préciser) qui suit une loi normale centrée réduite. En déduire la fonction de répartition de X à l'aide de la fonction Φ de répartition de Z. Calculer ensuite explicitement la densité de X.

b) Calculer l'espérance de X.

c) Montrer que $X^r \sim \mathcal{L}(r\mu, r^2\sigma^2)$ pour tout $r \neq 0$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X^r)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. Calculer la variance de X.

d) Calculer $\mathbb{E}\left(e^{uX}\right)$ pour tout $u > 0$.

Solution :

a) On a $X = e^Y$ avec $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. En posant $Z := \frac{Y-\mu}{\sigma}$ on trouve $X = e^{\mu+\sigma Z}$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Comme $X \geqslant 0$, on en déduit $\mathbb{P}(X \leqslant x) = 0$ pour tout $x \leqslant 0$, et pour tout $x > 0$ on a

$$\mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{\log x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right).$$

En dérivant on trouve que la densité de X vaut

$$\rho_X(x) = \rho_Z\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma x} = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

sur $]0, \infty[$ et zéro ailleurs.

b) En utilisant le théorème de transfert, on trouve

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(e^{\mu+\sigma Z}\right) = e^{\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma t}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}}\,\mathrm{d}t = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}.$$

c) On a

$$X^r = e^{r\mu+(r\sigma)Z}$$

et ceci entraîne par (a) que $X^r \sim \mathcal{L}(r\mu, r^2\sigma^2)$ pour tout $r \neq 0$, et donc par (b) que

$$\mathbb{E}(X^r) = e^{r\mu+r^2\sigma^2/2}$$

pour tout $r \in \mathbb{R}$. On en déduit la variance de X

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2 = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).$$

d) On a par le (a), et en appliquant le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}\left(e^{uX}\right) = \mathbb{E}\left(e^{ue^{\mu+\sigma Z}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ue^{\mu+\sigma x}-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \infty$$

puisque $u, \sigma > 0$ et donc $e^{ue^{\mu+\sigma x}-x^2/2} \to \infty$ quand $x \to \infty$.

Exercice 3

Les trois questions dans cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

a) Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 0} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

pour tout $x > 0$. En appliquant le théorème de convergence monotone, en déduire que

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}.$$

Connaissez-vous la valeur de cette série ?

b) En utilisant le théorème de convergence dominée, calculer explicitement

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^\infty \frac{n^2 \sin(x/n)}{(1+nx)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \right).$$

c) En utilisant le lemme de Fatou, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^\infty \frac{n}{\sin^2 n + nx^2}\,\mathrm{d}x \right) = \infty.$$

Solution :

a) Comme $x > 0$ on a $e^{-x} \in]0,1[$ et donc

$$\sum_{n\geqslant 0} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

par la somme de la série géométrique. On en déduit

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \sum_{n\geqslant 0} xe^{-x}e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} xe^{-x}e^{-kx}\,\mathrm{d}x$$

Comme la série est à termes positifs, la suite des sommes partielles est positive est croissante, donc on peut appliquer le théorème de convergence monotone qui entraîne

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \sum_{k=0}^{n} xe^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^\infty xe^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x \right).$$

Comme

$$\int_0^\infty xe^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(k+1)^2} \int_0^\infty ye^{-y}dy = \frac{1}{(k+1)^2}$$

pour tout $k \geqslant 0$ en ayant fait le changement de variable $y = (k+1)x$, on trouve finalement

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}.$$

Et oui, nous connaissons bien la valeur de cette série qui est $\pi^2/6$ (problème de Bâle).

b) On a

$$\frac{n^2 \sin(x/n)}{(1+nx)(1+x^2)} = \frac{nx}{1+nx} \times \frac{\sin(x/n)}{(x/n)} \times \frac{1}{1+x^2} \to \frac{1}{1+x^2}$$

quand $n \to \infty$ pour tout $x > 0$ puisque $(\sin z)/z \to 1$ quand $z \to 0$. D'autre part on a $|(\sin(x/n))/(x/n)| < 1$ et $nx/(1+nx) < 1$ pour tout $x > 0$ et $n \geqslant 0$, d'où

$$\left|\frac{n^2 \sin(x/n)}{(1+nx)(1+x^2)}\right| < \frac{1}{1+x^2}$$

pour tout $x > 0$ et $n \geqslant 0$, et la fonction de droite est intégrable. Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^\infty \frac{n^2 \sin(x/n)}{(1+nx)(1+x^2)}\, \mathrm{d}x \right) = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

c) On a

$$\frac{n}{\sin^2 n + nx^2} = \frac{1}{x^2 + (\sin^2 n/n)} \to \frac{1}{x^2}$$

quand $n \to \infty$ et donc

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\sin^2 n + nx^2} \right) = \frac{1}{x^2}$$

pour tout $x > 0$. Par le lemme de Fatou, on a

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\int_0^\infty \frac{n}{\sin^2 n + nx^2}\, \mathrm{d}x \right) \geqslant \int_0^\infty \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\sin^2 n + nx^2} \right) \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \infty$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^\infty \frac{n}{\sin^2 n + nx^2}\, \mathrm{d}x \right) = \infty.$$

Exercice 4

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires suivant une loi exponentielle de paramètre 1, dont on rappelle que la densité est donnée par $e^{-x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que les X_n sont mutuellement indépendantes. On note $M_0 = 0$ et

$$M_n \coloneqq \max(X_1, \ldots, X_n), \qquad n \geqslant 1.$$

a) Calculer la fonction de répartition $F_n(x) = \mathbb{P}(M_n \leqslant x)$ pour tout $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$. En déduire $G_n(x) \coloneqq \mathbb{P}(M_n - \log n \leqslant x)$ pour tout $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculer la fonction de répartition de $Z_1 = -\log X_1$. En déduire à l'aide de la question précédente et d'un équivalent approprié que

$$M_n - \log n \xrightarrow{d} -\log X_1$$

quand $n \to \infty$.

c) En utilisant les fonctions F_n et F_{n-1}, montrer que

$$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_{n-1}) + \frac{1}{n}$$

pour tout $n \geqslant 1$. En déduire que

$$\mathbb{E}(M_n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\cdot$$

Indication : On rappelle la formule $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(t))\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^0 F_X(t)\,\mathrm{d}t$, *où* F_X *est la fonction de répartition de* X*.*

d) En utilisant le théorème de convergence dominée et la question (b), montrer que

$$\mathbb{E}(M_n) - \log n \to \mathbb{E}(-\log X_1)$$

quand $n \to \infty$.

Indication : On rappelle que $\log(1-z) \leqslant -z$ *pour tout* $z < 1$ *et on pourra vérifier que* $\log(1-z) \geqslant -2z$ *pour tout* $z \in [0, 1/2]$*.*

e) En utilisant tout ce qui précède, montrer que la suite

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

converge quand $n \to \infty$ vers une constante finie, que l'on exprimera sous forme intégrale. Connaissez-vous le nom de cette constante ? Est-elle un nombre rationnel ?

Solution :

a) Rappelons que la fonction de répartition de la loi exponentielle est $F(x) = (1 - e^{-x})_+$, avec la notation $z_+ := \max(0, z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on trouve

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x, \ldots, X_n \leqslant x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \leqslant x) = (1 - e^{-x})_+^n.$$

On en déduit, pour tout $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$G_n(x) = \mathbb{P}(M_n \leqslant x + \log n) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)_+^n.$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on calcule

$$\mathbb{P}(Z_1 \leqslant x) = \mathbb{P}(\log X_1 \geqslant -x) = \mathbb{P}\left(X_1 \geqslant e^{-x}\right) = e^{-e^{-x}},$$

car $\mathbb{P}(X_1 \geqslant \alpha) = \mathbb{P}(X_1 > \alpha) = e^{-\alpha}$ pour $\alpha \geqslant 0$. On en déduit que

$$G_n(x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)_+^n = \exp\left[n \log\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)\right]$$

pour tout $x > -\log n$ et donc, à l'aide de l'équivalent $\log(1-z) \sim z$ quand $z \to 0$ que

$$\mathbb{P}(M_n - \log n \leqslant x) \to e^{-e^{-x}} = \mathbb{P}(Z_1 \leqslant x)$$

quand $n \to \infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puisqu'à partir d'un certain rang on aura $x \geqslant -\log n \to -\infty$ quand $n \to \infty$. Ceci entraîne par définition que

$$M_n - \log n \xrightarrow{d} -\log X_1$$

quand $n \to \infty$.

c) Comme M_n est une variable aléatoire positive, on peut utiliser la formule

$$\mathbb{E}\left(M_n\right) = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(M_n > x\right) dx = \int_0^\infty (1 - F_n(x))dx = \int_0^\infty \left(1 - (1 - e^{-x})^n\right) dx$$

pour tout $n \geqslant 1$. Comme

$$1 - (1 - e^{-x})^n = 1 - (1 - e^{-x})^{n-1} + e^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1}$$

on obtient

$$\mathbb{E}\left(M_n\right) = \mathbb{E}\left(M_{n-1}\right) + \int_0^\infty e^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} dx = \mathbb{E}\left(M_{n-1}\right) + \int_0^1 (1 - z)^{n-1} dz$$

en faisant le changement de variable $z = e^{-x}$, ce qui donne

$$\mathbb{E}\left(M_n\right) = \mathbb{E}\left(M_{n-1}\right) + \frac{1}{n}$$

et donc

$$\mathbb{E}\left(M_n\right) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

par itération, puisque $\mathbb{E}\left(M_1\right) = \mathbb{E}\left(X_1\right) = 1$.

d) On a

$$\mathbb{E}\left(M_n\right) - \log n = \mathbb{E}\left(M_n - \log n\right) = \int_0^\infty (1 - G_n(x))dx - \int_{-\infty}^0 G_n(x)dx$$

par la formule du cours sur l'espérance d'une variable aléatoire réelle. Par (b) on a $G_n(x) \to G(x) = \mathbb{P}\left(-\log X_1 \leqslant x\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et sous les hypothèses du théorème de convergence dominée on aura donc

$$\mathbb{E}\left(M_n\right) - \log n \to \int_0^\infty (1 - G(x))dx - \int_{-\infty}^0 G(x)dx = \mathbb{E}\left(-\log X_1\right)$$

quand $n \to \infty$ comme requis. Reste à vérifier les hypothèses du théorème de convergence dominée. On sait que $\log(1 - z) \leqslant -z$ pour tout $z < 1$ et donc

$$G_n(x) = \exp\left[n \log\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)_+\right] \leqslant e^{-e^{-x}}$$

pour tout $x \geqslant 0$, et le terme de droite est une fonction intégrable sur $(-\infty, 0)$. On vérifie aussi que $1 - z \geqslant e^{-2z}$ pour tout $z \in [0, 1/2]$ puisque la fonction $z \mapsto 1 - z - e^{-2z}$ est nulle en $z = 0$, strictement positive en $z = 1/2$ et de dérivée $2e^{-2z} - 1$ qui est positive puis négative. Ceci entraîne par croissance du logarithme

$$1 - G_n(x) = 1 - \exp\left[n \log\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)\right] \leqslant 1 - e^{-2e^{-x}}$$

pour tout $x \geqslant 0$ et $n \geqslant 2$, avec $1 - e^{-2e^{-x}} \leqslant 2e^{-x}$ qui est bien une fonction intégrable sur $]0, \infty[$.

e) En utilisant tout ce qui précède, on voit que

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \to \ \mathbb{E}\left(-\log X_1\right)$$

quand $n \to \infty$. Et par la formule de transfert on a

$$\mathbb{E}\left(-\log X_1\right) = \int_0^{\infty} (-\log x) e^{-x} dx$$

qui est bien une intégrale convergente en zéro et en l'infini. Il s'agit de la constante *gamma* d'Euler, dont on ne sait pas si elle est rationnelle ou non (mais on pense que non).