Département de Mathématiques — Université de Lille

Licence 3e année — parcours Mathématiques

2023–2024

M61B, Probabilités et intégration

Examen final

18 avril 2024

[durée : 3 heures]

⚠ *Les documents et les objets électroniques sont interdits. Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être justifiées.*

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre α et que Y suit la loi géométrique de paramètre β, avec $\alpha, \beta \in]0,1[$. On note

$$Z := \min(X, Y).$$

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X > k)$ et $\mathbb{P}(Y > k)$.

b) Calculer $\mathbb{P}(Z > k)$, puis en déduire la loi de Z. Identifier cette loi.

Exercice 2

Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^*$. Une variable aléatoire X à valeurs dans $]0, +\infty[$ est dite suivre une loi *log-normale* de paramètres (μ, σ^2) si $Y = \log X$ suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On note $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2)$ la loi log-normale de paramètres (μ, σ^2).

a) Exprimer X à l'aide d'une variable Z (à préciser) qui suit une loi normale centrée réduite. En déduire la fonction de répartition de X à l'aide de la fonction Φ de répartition de Z. Calculer ensuite explicitement la densité de X.

b) Calculer l'espérance de X.

c) Montrer que $X^r \sim \mathcal{L}(r\mu, r^2\sigma^2)$ pour tout $r \neq 0$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X^r)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. Calculer la variance de X.

d) Calculer $\mathbb{E}\left(e^{uX}\right)$ pour tout $u > 0$.

T.S.V.P.

Exercice 3

Les trois questions dans cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

a) Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 0} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

pour tout $x > 0$. En appliquant le théorème de convergence monotone, en déduire que

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}\cdot$$

Connaissez-vous la valeur de cette série ?

b) En utilisant le théorème de convergence dominée, calculer explicitement

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^\infty \frac{n^2\sin(x/n)}{(1+nx)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\right).$$

c) En utilisant le lemme de Fatou, montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^\infty \frac{n}{\sin^2 n + nx^2}\,\mathrm{d}x\right) = \infty.$$

Exercice 4

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires suivant une loi exponentielle de paramètre 1, dont on rappelle que la densité est donnée par $e^{-x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que les X_n sont mutuellement indépendantes. On note $M_0 = 0$ et

$$M_n \coloneqq \max(X_1,\ldots,X_n), \qquad n\geqslant 1.$$

a) Calculer la fonction de répartition $F_n(x) = \mathbb{P}\left(M_n \leqslant x\right)$ pour tout $n\geqslant 1$ et $x\in\mathbb{R}$. En déduire $G_n(x) \coloneqq \mathbb{P}\left(M_n - \log n \leqslant x\right)$ pour tout $n \geqslant 1$ et $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculer la fonction de répartition de $Z_1 = -\log X_1$. En déduire à l'aide de la question précédente et d'un équivalent approprié que

$$M_n - \log n \xrightarrow{d} -\log X_1$$

quand $n\to\infty$.

c) En utilisant les fonctions F_n et F_{n-1}, montrer que

$$\mathbb{E}\left(M_n\right) = \mathbb{E}\left(M_{n-1}\right) + \frac{1}{n}$$

pour tout $n\geqslant 1$. En déduire que

$$\mathbb{E}\left(M_n\right) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\cdot$$

Indication : On rappelle la formule $\mathbb{E}\left(X\right) = \int_0^\infty \left(1-F_X(t)\right)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^0 F_X(t)\,\mathrm{d}t$, *où* F_X *est la fonction de répartition de* X.

d) En utilisant le théorème de convergence dominée et la question (b), montrer que

$$\mathbb{E}\left(M_n\right) - \log n \to \mathbb{E}\left(-\log X_1\right)$$

quand $n \to \infty$.

Indication : On rappelle que $\log(1-z) \leqslant -z$ *pour tout* $z < 1$ *et on pourra vérifier que* $\log(1-z) \geqslant -2z$ *pour tout* $z \in [0, 1/2]$.

e) En utilisant tout ce qui précède, montrer que la suite

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

converge quand $n \to \infty$ vers une constante finie, que l'on exprimera sous forme intégrale. Connaissez-vous le nom de cette constante ? Est-elle un nombre rationnel ?