

## TD1 - EVÉNEMENTS ET TRIBUS

## Rappels : probabilité, indépendance, conditionnement

**Exercice 1** (*Quizz*)

Pour chacune des assertions suivantes, donner soit une preuve, soit un contre-exemple.

- Si  $A$  et  $B$  sont deux événements indépendants et incompatibles alors l'un des deux événements au moins est de probabilité nulle.
- Si l'un des événements  $A$  ou  $B$  est de probabilité nulle alors  $A$  et  $B$  sont indépendants et incompatibles.
- Si un événement  $A$  est indépendant d'un événement  $B$  et d'un événement  $C$ , alors il est indépendant de  $B \cup C$ .
- Si un événement  $A$  est indépendant d'un événement  $B$  et si  $C$  est un événement tel que  $C \subset B$  alors  $A$  est indépendant de  $C$ .

**Exercice 2** (*Une inégalité injustement méconnue*)

Sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , on note  $A$  un événement quelconque et  $B$  un événement tel que  $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ .

- Montrez que

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4} |\mathbb{P}(A | B) - \mathbb{P}(A | B^c)|. \quad (\star)$$

*Indication : Commencez par exprimer  $\mathbb{P}(A | B) - \mathbb{P}(A | B^c)$  en fonction des seules probabilités  $\mathbb{P}(A \cap B)$ ,  $\mathbb{P}(A)$ ,  $\mathbb{P}(B)$ .*

- Que donne l'inégalité  $(\star)$  lorsque  $A \subset B$  ?
- Dans quels cas  $(\star)$  est-elle une égalité ?

**Exercice 3** (*Être de probabilité 1 ou ne pas être*)

- Quelle est la probabilité d'une intersection dénombrable d'événements de probabilité 1 ?
- Peut-il exister  $n$  événements indépendants de même probabilité  $p$  dont la réunion soit l'espace  $\Omega$  tout entier ?

#### Exercice 4 (Tirer un nombre réel au hasard)

On décide de « tirer au hasard » un réel  $x \in [0, 1[$ . Pour cela on effectue — par la pensée ! — une infinité de tirages avec remise dans une urne contenant des boules marquées chacune d'un chiffre décimal. On construit  $x$  en écrivant — toujours par la pensée — son développement décimal illimité, le numéro sorti au  $i^{\text{e}}$  tirage fournissant le  $i^{\text{e}}$  chiffre décimal de  $x$ . La composition précise de l'urne est inconnue. On sait seulement qu'il y a au moins une boule marquée 0, qu'il n'y a aucune boule marquée 9 et qu'il y a au moins une boule marquée d'un autre chiffre que 0. Comme aucune boule dans l'urne n'est marquée 9, le développement décimal illimité ainsi obtenu est forcément propre. On note  $p$  la probabilité de sortir une boule marquée 0 au  $i^{\text{e}}$  tirage. En raison du mode de tirage (une boule avec remise) et de la composition de l'urne, il est clair que  $p$  ne dépend pas de  $i$  et que  $0 < p < 1$ .

Pour chaque  $i$  de  $\mathbb{N}^*$  on note  $N_i$  l'événement :

$$N_i := \{\text{le } i^{\text{e}} \text{ chiffre de } x \text{ après la virgule est un zéro}\}$$

Les  $N_i$  sont indépendants et tous de probabilité  $p$ .

a) Exprimer par des opérations ensemblistes sur les  $N_i$  les événements :

$$D_n := \{\text{l'écriture décimale illimitée de } x \text{ ne comporte que des zéros à partir du rang } n\},$$

$$D := \{x \text{ est un nombre décimal}\},$$

$$E := \{\text{l'écriture de } x \text{ comporte une infinité de zéros}\}.$$

Comparer  $D$  et  $E$ .

b) Donner  $\mathbb{P}(\{x < 10^{-4}\})$ . Les  $N_i$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ , sont-ils deux à deux disjoints ?

c) Calculer la probabilité de l'évènement

$$F_n := \{\text{le premier chiffre non-nul après la virgule est au rang } n\}.$$

Les  $F_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , sont-ils deux à deux disjoints ?

d) Écrire  $\bigcup_{i=1}^{+\infty} N_i^c$  à l'aide des  $F_n$  et calculer sa probabilité. En déduire  $\mathbb{P}(\{x = 0\})$ .

e) Pour  $m \in \mathbb{N}^*$ , calculer la valeur de  $\mathbb{P}(D_m)$ . On pourra utiliser la monotonie de la suite  $(G_n)_{n \geq m}$  où  $G_n := \bigcap_{i=m}^n N_i$ .

f) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre décimal avec ce type de tirage aléatoire ?

g) Reprendre la question précédente avec une urne dans laquelle on a rajouté une boule numérotée 9.

**Exercice 5** (*Fonction non Riemann intégrable*)

a) Soit  $h$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]0, 1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Vérifier que  $h$  est Riemann intégrable.

b) Considérons  $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}(x)$ . Montrer que  $f$  n'est pas Riemann intégrable sur  $[0, 1]$ .

c) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ avec } \text{pgcd}(p, q) = 1, 0 < p \leq q, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que  $g$  est Riemann intégrable et que  $f = h \circ g$ . Que peut-on en déduire ?

d) On rappelle que  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  est dénombrable et on note  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une numérotation de cet ensemble.

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(x) = \mathbb{1}_{\{r_1, \dots, r_n\}}(x)$ .

Montrer que  $f_n$  est Riemann intégrable sur  $[0, 1]$ .

e) Montrer que  $(f_n)_n$  converge simplement vers  $f$ . Que peut-on en déduire ?

**Exercice 6** (*Limites supérieures et inférieures d'ensemble*)

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de parties d'un ensemble  $\Omega$ , on définit

$$\limsup A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{p \geq n} A_p \quad \text{et} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{p \geq n} A_p.$$

a) Justifier que  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n$  est l'ensemble des éléments de  $\Omega$  appartenant à une infinité de  $A_n$  et  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n$  est l'ensemble des éléments de  $\Omega$  appartenant à tous les  $A_n$  sauf à un nombre fini.

b) Montrer que si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante pour l'inclusion, alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

c) Montrer que si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante pour l'inclusion, alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

d) Montrer que  $\mathbb{1}_{\bigcup_{p \geq n} A_p} = \sup_{p \geq n} \mathbb{1}_{A_p}$  et  $\mathbb{1}_{\bigcap_{p \geq n} A_p} = \inf_{p \geq n} \mathbb{1}_{A_p}$ . En déduire les que  $\mathbb{1}_{\limsup A_n} = \limsup \mathbb{1}_{A_n}$  et  $\mathbb{1}_{\liminf A_n} = \liminf \mathbb{1}_{A_n}$ .

e) Montrer que

(i)  $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$ .

(ii)  $\liminf A_n \subset \limsup A_n$ .

(iii)  $\limsup A_n = \{x \in \Omega \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}(x) = +\infty\}$ .

(iv)  $\liminf A_n = \{x \in \Omega \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n^c}(x) < +\infty\}$ .

(v)  $\limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$ .

(vi)  $\limsup(A_n \cap B_n) \subset \limsup A_n \cap \limsup B_n$ .

f) Calculer  $\limsup A_n$  et  $\liminf A_n$  dans les cas suivants :

(i)  $A_n = ]-\infty, a_n]$  avec  $a_{2p} = 1 + \frac{1}{2p}$  et  $a_{2p+1} = -1 - \frac{1}{2p+1}$ .

(ii)  $A_{2p} = ]0, 3 + \frac{1}{3p}[$  et  $A_{2p+1} = ]-1 - \frac{1}{3p}, 2]$ .

(iii)  $A_k = p_k \mathbb{N}$  où  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est la suite des nombres premiers.

## Tribus

### Exercice 7

On rappelle que la tribu des boréliens de  $\mathbb{R}^2$  est engendrée par les ouverts de  $\mathbb{R}^2$ . Démontrer que les ensembles suivants sont des boréliens de  $\mathbb{R}^2$  :

a)  $\Delta = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ .

b)  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ et } x \notin \mathbb{Q}\}$ .

### Exercice 8 (Quiz)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier brièvement ou donner un contre-exemple.

a) Soient  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  deux tribus sur  $\Omega$ . Alors  $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$  est une tribu sur  $\Omega$ .

b) Si  $A$  est un ensemble inclus dans un ensemble  $B$  mesurable, alors  $A$  est mesurable.

### Exercice 9 (Union et intersection de tribus)

a) Soit  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ .

(i) Identifier la tribu  $\mathcal{F}_1$ , engendrée par le singleton  $\{1\}$  et la tribu  $\mathcal{F}_2$  engendrée par  $\{2\}$ .

(ii) Identifier  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ . Est-ce que ce sont des tribus ?

b) Soit  $\Omega$  un ensemble quelconque et  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  des collections d'ensembles de  $\Omega$ . Donc  $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{P}(\Omega)$ .

(i) Montrer que  $\mathcal{F}_{\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{C}_1} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{C}_2}$ .

(ii) Montrer qu'il n'est pas toujours vrai que  $\mathcal{F}_{\mathcal{C}_1} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{C}_2} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2}$ .

c) Soit  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ .

(i) Soit  $\mathcal{C}^c = \mathcal{P}(\Omega) \setminus \mathcal{C}$ . Est-il vrai que  $\mathcal{F}_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{C}^c} = \emptyset$  ? Est-il vrai que  $\mathcal{F}_{\mathcal{C}} = \mathcal{F}_{\mathcal{C}^c}$  ?

(ii) Soit  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  et soit  $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid A^c \in \mathcal{C}\}$ . Est-il vrai que  $\mathcal{F}_{\mathcal{C}} = \mathcal{F}_{\mathcal{D}}$  ?

**Exercice 10** (*Tribu, expérience, information*)

- a) On lance un dé à quatre faces. Ecrire l'ensemble  $\Omega$  de tous les résultats possibles.
- b) Une personne lance le dé et nous annonce le résultat tiré. Ecrire la tribu  $\mathcal{F}_2$  de tous les événements observables pour nous.
- c) La personne lance le dé et nous annonce seulement « pair » ou « impair ». Ecrire la tribu  $\mathcal{F}_1$  des événements observables pour nous.
- d) La personne lance le dé et n'annonce rien ! A quelle la tribu  $\mathcal{F}_0$  correspond cette fois l'expérience que nous observons ?
- e) On dit que  $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  est une suite croissante de tribus. En quoi est-elle croissante ? Qu'est-ce qui augmente, intuitivement, le long de cette suite ? Dans l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , que représente la tribu  $\mathcal{F}$  ?
- f) La modélisation mathématique des produits financiers dérivés (stock-options) utilise des espaces probabilisés complexes. Ils sont munis de tribus  $\mathcal{F}_t$  indexées par la date et contenant tous les événements observables de l'origine jusqu'à la date  $t$ . L'affirmation  $\mathcal{F}_{24 \text{ février } 2022} \subset \mathcal{F}_{1 \text{ avril } 2024}$  est considérée par les quants comme une évidence. Pourquoi ? Quelle capacité (réaliste ?) pré-suppose ce choix de modélisation ?

**Exercice 11** (*Une tribu sur les entiers*)

Soit  $\Omega = \mathbb{Z}$ . On considère  $\mathcal{T}$  la tribu engendrée par les ensembles

$$S_n = \{n, n+1, n+2\}, \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}.$$

- a) Montrer que quel que soit  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\{n\}$  appartient à  $\mathcal{T}$ .
- b) En déduire  $\mathcal{T}$ .

**Exercice 12** (*Tribu engendrée par une partition*)

Soit  $E$  un ensemble et  $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  une partition de  $E$ , c'est-à-dire

$$E = \bigcup_{i=1}^n E_i, \quad E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Montrer que

$$\sigma(\{E_1, E_2, \dots, E_n\}) = \left\{ \bigcup_{i \in I} E_i : I \subset \{1, 2, \dots, n\} \right\}.$$

**Exercice 13** (*Ensemble engendrant la tribu borélienne*)

Soit  $\mathcal{B}(]0, 1[)$  la tribu Borélienne sur  $]0, 1[$ .

- a) Montrer que tout ouvert de  $]0, 1[$  peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles de  $]0, 1[$  de la forme  $[r - \delta, r + \delta]$  où  $r$  et  $\delta$  sont des rationnels de  $]0, 1[$ .
- b) Montrer que  $\mathcal{B}(]0, 1[)$  est engendrée par chacune des familles suivantes :
  - (i)  $\mathcal{C}_1 = \{[a, b], a \leq b, a, b \in ]0, 1[ \}$ .
  - (ii)  $\mathcal{C}_2 = \{[a, b], a \leq b, a, b \in ]0, 1[ \cap \mathbb{Q} \}$ .

(iii)  $\mathcal{C}_3 = \{]0, t], t \in ]0, 1[ \}$ .

(iv)  $\mathcal{C}_4 = \{]0, \frac{1}{2^n}[, [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[, n \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} \}$ .

c) Considérons pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la famille suivante d'ensembles de  $]0, 1[$  :

$$\mathcal{T}_n = \sigma \left( ]0, 1/2^n[, [k/2^n, (k+1)/2^n[, k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} \right).$$

Montrer que la suite des  $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante au sens de l'inclusion mais que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$  n'est pas une tribu.

*Indication : On pourra vérifier que*

$$\{1/2\} = \bigcap_{n \geq 1} \left[ \frac{k_n}{2^n}, \frac{k_n + 1}{2^n} \right[ ,$$

pour une certaine suite d'entiers  $k_n \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$  et raisonner par l'absurde en montrant que si  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$  est une tribu, alors  $\{1/2\} \in \mathcal{T}_n$ , pour un certain  $n$ . On conclura à une absurdité en utilisant l'exercice 12.

**Exercice 14** (Tribu engendrée par les singletons) Soit  $\Omega$  un ensemble non vide et  $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) : A \text{ dénombrable ou } \Omega \setminus A \text{ dénombrable}\}$ .

- Vérifier que  $\mathcal{T}$  est une tribu sur  $\Omega$ .
- Montrer que la tribu engendrée par les singletons de  $\Omega$  est  $\mathcal{T}$ .
- Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des parties finies de  $\Omega$  ?

**Exercice 15** (Points de convergence d'une suite d'applications)

Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite d'applications mesurables de  $\mathbb{R}$  dans lui-même.

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $(f_n(x))_{n \geq 1}$  converge vers  $l$  si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $l \geq k$ ,  $|f_l(x) - l| < \frac{1}{n}$ .
- Soit  $A := \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\}$ . Montrer que

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{l \geq k} f_l^{-1}] -1/n, 1/n[.$$

En déduire que  $A$  est un borélien de  $\mathbb{R}$ .

- Montrer que  $B := \{x \in \mathbb{R} : (f_n(x))_{n \geq 1} \text{ admet } 0 \text{ comme valeur d'adhérence}\}$  est un borélien de  $\mathbb{R}$ .
- Montrer que  $C := \{x \in \mathbb{R} : (f_n(x))_{n \geq 1} \text{ admet une limite}\}$  est un borélien de  $\mathbb{R}$ .

*Indication : Utiliser le critère de Cauchy pour caractériser l'existence d'une limite.*