TD3 - Mesures et mesure de Lebesgue

Exemples et propriétés des mesures

Exercice 1 *(La mesure de comptage)*

Soit X un ensemble non vide. Pour $A \in \mathcal{P}(X)$, on pose

$$c(A) \coloneqq \operatorname{card}(A).$$

Montrer que c est une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$. *Cette mesure s'appelle la mesure de comptage sur X.*

Exercice 2 *(Exemples de mesures)*

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'application donnée est une mesure sur l'espace mesurable $(E, \mathscr{T})$.

a) Soit $\mathscr{T} = \mathscr{P}(E)$. Pour $a \in E$ fixé, δ_a est l'application définie par $\forall A \in \mathscr{T}$, $\delta_a(A) = \mathbb{1}_A(a)$.

b) Soient $E = \mathbb{R}$, $\mathscr{T} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ A \text{ ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$ et $\mu(A) = 0$ si A est dénombrable, $\mu(A) = 1$ sinon.

Exercice 3 *(Ensembles de mesure positive)*

Soit $f : (E, \mathscr{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Soit μ une mesure sur $(E, \mathscr{T})$.

a) Montrer que si $\mu(E) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathscr{T}$, $\mu(A) \neq 0$ tel que f soit bornée sur A.

b) Justifier que $\{f \neq 0\} \in \mathscr{T}$.

c) Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathscr{T}$, $\mu(A) \neq 0$ tel que $|f|$ est minorée sur A par une constante strictement positive.

Exercice 4 *(Tribus des évènements triviaux)*

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On note

$$\mathscr{T} = \{A \in \mathscr{F} \mid \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(A) = 1\}.$$

Montrer que $\mathscr{T}$ est une tribu.

Exercice 5 *(Continuité de la mesure)*

Soit $(E, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (E, \mathscr{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. On suppose que $\mu(\{x \in E \mid f(x) > 0\}) > 0$. Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mu(\{x \in E \mid f(x) > \varepsilon\}) > 0.$$

Exercice 6 *(Mesures invariantes)*

Soit μ une mesure sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$. On suppose que μ est non nulle et invariante par translation, c.-à-d. pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mu(n+A) = \mu(A)$ où $n + A = \{n + p \mid p \in A\}$.

a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\mu(\{n_0\}) \neq 0$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mu(\{n_0\}) = \mu(\{n\})$.

c) En déduire que $\mu(\mathbb{Z}) = +\infty$.

Exercice 7 *(Régularité et mesure finie)*

Soit μ une mesure **finie** sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. L'objectif de l'exercice est de montrer que μ une mesure *régulière*, c.-à-d. pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid F \text{ fermé, } F \subset A\} \quad \text{et}$$
$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) \mid O \text{ ouvert, } A \subset O\}.$$

a) Montrer μ est régulière si et seulement si tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $(\star)$ suivante :

$(\star)$: $\forall \varepsilon > 0$ il existe un ouvert O et un fermé Fde $\mathbb{R}$ tels que $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus F) \leqslant \varepsilon$.

b) Introduisons $\mathscr{T} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid A \text{ vérifie } (\star)\}$.

(i) Montrer que $\mathscr{T}$ contient tous les intervalles de la forme $]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Montrer que $\mathscr{T}$ est stable par union dénombrable.
Indication : Soit $A_n \in \mathscr{T}$, $n \geqslant 1$, et $\varepsilon > 0$. Considérer alors F_n fermé de $\mathbb{R}$ et O_n ouvert de $\mathbb{R}$ tels que $F_n \subset A_n \subset O_n$ et $\mu(O_n \setminus F_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Remarquer qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que $\mu(\bigcup_{k\geqslant 1} F_n) \leqslant \mu(\bigcup_{k=1}^{n} F_k) + \frac{\varepsilon}{2}$.

(iii) Montrer que $\mathscr{T}$ est stable par passage au complémentaire.

(iv) Conclure.

Autour de la mesure de Lebesgue

Exercice 8 *(Relations entre mesure, topologie et métrique)*

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

a) Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(U) < +\infty$. La réciproque est-elle vraie ? (Considérez des ouverts centrés en n pour $n \in \mathbb{N}$.)

b) Soit $\varepsilon > 0$. Construire un ouvert U dense dans $\mathbb{R}$ de sorte que $\lambda(U) \leqslant \varepsilon$. Pour cela, on pourra considérer une partie dense et dénombrable de $\mathbb{R}$.

c) Soit A un borélien de $\mathbb{R}$. Montrer que si A contient un ouvert non vide, alors $\mu(A) > 0$. Si $B = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, que vaut $\lambda(B)$? B peut-il contenir un ouvert ?

Exercice 9 *(Lebesgue nulle et intérieur)*

Montrer que tout sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue nulle est d'intérieur vide.

Exercice 10 *(Un calcul avec la mesure de Lebesgue)*

On considère $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ. Pour $n \geqslant 0$, on pose $A_n =]n, n+2^{-n}[$.

a) Justifier que pour tout $n \geqslant 0$, on a $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

b) Soit $A = \bigcup_{n\geqslant 0} A_n$. Justifier que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Calculer $\lambda(A)$.

c) Un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure (de Lebesgue) finie est-il nécessairement borné ?

Exercice 11 *(Un deuxième calcul avec la mesure de Lebesgue)*

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombre réels. On pose

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, |x - a_n| \leqslant 2^{-n}\}$$

a) Justifier que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $1 \leqslant \lambda(A) \leqslant 2$ (ici comme d'habitude λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$).

c) Calculer $\lambda(A^c)$ où A^c désigne le complémentaire de A dans $\mathbb{R}$.

d) Calculer $\lambda(A)$ lorsque $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

e) Calculer $\lambda(A)$ lorsque $a_n = n$ pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 12 *(Un ensemble non borélien : l'ensemble de Vitali)*

Nous allons exhiber dans cet exercice une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas dans la tribu des boréliens.

a) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on définit la relation suivante : $x\mathcal{R}y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b) En déduire qu'il existe $E \subset [0,1]$ tel que pour tout réel x, on peut trouver un réel unique $y \in E$ avec $x - y \in \mathbb{Q}$.

c) On pose

$$G = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (E + r)$$

Montrer que $[0,1] \subset G \subset [-1,2]$ et montrer que si $r, s \in \mathbb{Q}$, alors $r \neq s \Longleftrightarrow (E+r)\cap(E+s) = \emptyset$.

d) En utilisant la mesure de Lebesgue, en déduire que $E \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (on raisonnera par l'absurde).

Exercice 13 *(Continuité et notion de presque partout)*

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ (c.-à-d. la restriction à $[0,1]$ de la mesure de Lebesgue). Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons que f est nulle sur un borélien de mesure 1, c.-à-d. que $\lambda\left(f^{-1}(0)\right) = 1$. Montrer alors que f est identiquement nulle. Le résultat subsiste-t-il si on remplace continue par mesurable ?