TD4 - VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Dans toute la fiche, on supposera que les variables aléatoires d'un même exercice sont définies sur un même espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Pour s'échauffer : événements, calculs de probabilités

Exercice 1 *(Calculs de probabilités)*

Dans un restaurant, on compte 18 femmes et 12 hommes. Il y a 21 droitiers en tout, dont 15 sont des femmes. En choisissant un client au hasard, quelle est la probabilité qu'il/elle soit gaucher-ère ? Même question si l'on choisit un homme au hasard.

Exercice 2 *(Les chats de Shrödinger)*

Considérons l'expérience de pensée suivante : on place 20 chats dans des boites individuelles. Par ailleurs, en plus des chats,

- ▷ 10 boites ne contiennent rien d'autre,
- ▷ 5 boites contiennent 3g d'arsenic,
- ▷ 5 boites contiennent 10g d'arsenic.

Au bout d'une heure, la probabilité qu'un chat soit encore en vie dans la boite est égale à 1 si la boite ne contient pas d'arsenic, 0,6 si la boite contient 3g d'arsenic, et 0,2 si la boite contient 10g d'arsenic[1]. On choisit une des 20 boites au hasard.

a) Quelle est la probabilité que le chat qui s'y trouve soit encore en vie au bout d'une heure ?

b) Le chat est en vie. Quelle est la probabilité que la boite ait été vide quand on l'y a placé ?

Exercice 3 *(Un problème de transit)*

Deux avions (A et B), contenant respectivement $n_A = 20$ et $n_B = 40$ passagers, atterrissent à l'aéroport Charles de Gaulle. Dans l'avion A, qui vient de Séoul (Corée du Sud), chaque passager à une probabilité $p_A = 0,01$ d'être infecté par le coronavirus. Dans le avion B, qui vient de Houston (USA), chaque passager y a une probabilité $p_B = 0,2$ d'être infecté. On suppose que les passagers sont tous indépendants entre eux.

a) On note X_A et X_B le nombre de passager infectés dans chacun des avions.

(i) Quelle est la loi de X_A et X_B ?

(ii) Quelle est l'espérance du nombre total de passagers infectés ?

1. Aucun chat n'a été maltraité pour l'élaboration de cette expérience de pensée !

(iii) S'il y a deux ou plus passagers infectés, peu importe leur provenance, l'aéroport doit être scellé, et tous les passagers mis en quarantaine. Quelle est la probabilité que cela ne soit pas nécessaire ?

b) Un bus attend les passagers de Houston (avion B), mais un passager n'est pas autorisé à monter si une caméra thermique lui repère de la fièvre, donc le bus ne contiendra que les $Y_B \leqslant 40$ passagers pour lesquels aucune fièvre n'a été repérée. La caméra repère de la fièvre pour un passager infecté dans 95% des cas, et repère de la fièvre pour un passager sain dans 20% des cas.

(i) On suppose que $X_B = 10$. Quelle est la distribution du nombre de passagers sains qui a pu monter dans le bus ? Quelle est la distribution du nombre de passagers infectés qui a pu monter dans le bus ?

(ii) On suppose toujours que $X_B = 10$. On choisit une personne au hasard dans le groupe de Houston, quelle est la probabilité p_E qu'elle soit autorisée à monter dans le bus ? Même question si $X_B = k \in \{0, \dots, 40\}$. Quelle est la distribution de Y_B ?

(iii) On ne suppose plus rien sur X_B. On choisit au hasard un des passagers en provenance de Houston, calculer p_E.

c) On suppose que la caméra thermique a scanné également les passagers de Seoul. Quelle est la probabilité qu'elle n'ait repéré de la fièvre chez aucun des passagers des deux vols ?

Exercice 4 *(Contrôleur contre fraudeur)*

Une compagnie de métro pratique les tarifs suivants. Le ticket donnant droit à un trajet coûte 1 € ; les amendes sont fixées à 20 € pour la première infraction constatée, 40 € pour la deuxième et 400 € pour la troisième. La probabilité p pour un voyageur d'être contrôlé au cours d'un trajet est supposée constante et connue de la seule compagnie ($0 < p < 1$). Un fraudeur décide de prendre systématiquement le métro sans payer jusqu'à la deuxième amende et d'arrêter alors de frauder. On note T le nombre de trajets effectués jusqu'à la deuxième amende (T est le numéro du trajet où le fraudeur est contrôlé pour la deuxième fois). On note $q = 1 - p$ la probabilité de faire un trajet sans contrôle.

a) Montrer que la loi de T est donnée par

$$\mathbb{P}(T = k) = (k-1)p^2 q^{k-2}, \quad k \geqslant 2.$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer $\mathbb{P}(T > n)$.

Indication : On pourra commencer par chercher une formule explicite pour la somme de la série entière $f(x) := \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^{k-1}$, puis pour sa dérivée terme à terme.

c) Calculer numériquement $\mathbb{P}(T > 60)$ (pourquoi s'intéresse-t-on à cette quantité ?) lorsque $p = 1/10$ et lorsque $p = 1/20$.

Une variable aléatoire discrète

Exercice 5 *(Loi image)*

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(3, \frac{1}{4})$ et f la fonction *parité*, c.-à-d. $f(n) = 1$ si n est impaire et $f(n) = 0$ si n est paire.

a) Pourquoi $f(X)$ est une variable aléatoire (discrète) ?

b) Déterminer la loi de $f(X)$.

Exercice 6 *(Deux dés)*

Nous lançons deux dés non truqués.

a) La variable aléatoire X est la somme des points obtenus. Quelle est la distribution de X ?

b) Même question pour la variable aléatoire Y égale au minimum des deux résultats obtenus.

c) On considère la variable aléatoire $Z = (X - 7)^2$. Quelle est la distribution de Z ?

Exercice 7 *(Contrôle de qualité)*

Une machine-outil produit à la chaîne des objets manufacturés et l'on sait qu'en période de marche normale la probabilité pour qu'un objet soit défectueux est p. On se propose de vérifier la machine. À cet effet, on définit la variable aléatoire T_r égale au nombre minimum de prélèvements successifs qu'il faut effectuer pour amener r objets défectueux. Calculer la loi de T_r.

Exercice 8 *(Maximum de la loi de Poisson)*

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{N}$ la probabilité $P(X = k)$ est maximale ?

Exercice 9 *(Une autre formule pour l'espérance)*

Soit X une variable aléatoire d'espace d'états $\{0, \ldots, N\}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > k).$$

Que peut-on dire si X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ tout entier ?

Plusieurs variables aléatoires discrètes

Exercice 10 *(Sur la loi uniforme)*

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$.

a) Déterminer $\mathbb{P}(X = Y)$.

b) Déterminer $\mathbb{P}(X \geqslant Y)$.

c) Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 11 *(Loi jointe)*

On considère deux variables X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, et on suppose que l'on a, pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}^2$

$$\mathbb{P}\left(X = j, Y = k\right) = \alpha \frac{(j+k)(1/2)^{j+k}}{j!k!}.$$

Cette quantité est la *loi jointe* du couple de variables aléatoires (X,Y), dont Xet Y sont les *marginales*.

a) Déterminer le réel α.

b) À partir de cette formule, déterminer la loi de X et la loi de Y.

c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Montrer que $\mathbb{E}\left(2^{X+Y}\right) < \infty$, et la calculer.

Exercice 12 *(Mélange de lois)*

On suppose que le nombre N d'œufs pondus par un insecte suit une loi de Poisson de paramètre α :

$$\mathbb{P}\left(N = k\right) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k\,!} \qquad k \in \mathbb{N}$$

On suppose également que la probabilité de développement d'un œuf est p et que les œufs sont mutuellement indépendants. On note S le nombre (aléatoire) de survivants. Montrer que S suit une loi de Poisson de paramètre $p\alpha$.

Exercice 13 *(Minimum de lois géométriques)*

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On considère N variables indépendantes $X_1, \ldots, X_N$, chacune de loi géométrique de paramètre p.

a) Soit $i \in \{1, \ldots, N\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}\left(X_i \leqslant n\right)$ puis $\mathbb{P}\left(X_i > n\right)$.

b) On définit la v.a. Y par $Y = \min_{1 \leqslant i \leqslant N} X_i$, c.-à-d. que pour tout $\omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min\{X_i(\omega), \ldots, X_N(\omega)\}$.

(i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}\left(Y > n\right)$. En déduire $\mathbb{P}\left(Y \leqslant n\right)$. Quelle est la loi de Y ?

(ii) Y admet-elle une espérance finie ? Si oui, la calculer.

Exercice 14 *(Deux propriétés classiques des lois de Poisson)*

a) Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes de lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2.

(i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}\left(X_1 + X_2 = n\right)$.

(ii) En déduire l'espérance $\mathbb{E}\left(X_1 + X_2\right)$ et la variance $\mathbb{V}\left(X_1 + X_2\right)$.

b) On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ, et qu'il existe $p \in [0,1]$ tel que pour tout $k \leqslant m$,

$$\mathbb{P}\left(X = k \mid Y = m\right) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}.$$

On dira alors que la distribution *conditionnelle* de X sachant $\{Y = m\}$ est Binomiale(m,p). Déterminer la loi de X.

Exercice 15 *(Fonctions génératrices)*

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle *fonction génératrice* de X la série entière

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X = n\right) t^n.$$

a) Soit R le rayon de convergence de cette série, montrer que $R \geqslant 1$.

b) À l'aide du théorème de transfert, exprimer $G_X(t)$ comme l'espérance d'une fonction de X pour $t < R$.

c) (i) Justifier que G_X est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$.

(ii) En calculant ses premières dérivées, justifier que sa dérivée k-ième $G_X^{(k)}$ est donnée par

$$G_X^{(k)} = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k}.$$

(iii) Exprimer $G_X^{(k)}$ en fonction de la distribution de X.

(iv) En déduire que si $G_X = G_Y$ sur $]-1, 1[$ alors X et Y ont même loi.

d) (i) Calculer G_X lorsque X suit une loi de Bernoulli de paramètre p puis lorsque X suit une loi binomiale de paramètres (n, p).

(ii) On suppose que X et Y sont indépendantes. Démontrer que pour tout $t \in]-1, 1[$

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t).$$

(iii) Soit $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ et $Y \sim \mathrm{Bin}(m, p)$ deux variables aléatoires indépendantes. En utilisant les fonctions génératrices, déterminer la loi de $X+Y$. Retrouver ce résultat sans les fonctions génératrices.

e) On suppose maintenant que $R > 1$.

(i) On suppose que X est intégrable, i.e. $\sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) < +\infty$. Calculer la dérivée G'_X de G_X et exprimer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de G'_X.

(ii) On suppose maintenant que X est de carré intégrable, i.e. $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(X = n) < +\infty$. Calculer G''_X et montrer que

$$\mathbb{E}(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1).$$

(iii) En déduire en fonction de G_X l'expression de la variance de X.

Exercice 16 *(Retours à l'origine)*

Considérons un ivrogne qui, à chaque étape, fait un pas en avant avec une probabilité $p > \frac{1}{2}$ et un pas en arrière avec une probabilité $q = 1 - p$. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi décrivant les déplacements de l'ivrogne, où

$$P(X_i = +1) = p, \qquad P(X_i = -1) = q.$$

On pose la variable « position » $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ et l'événement « retour à l'origine » $A_n := \{S_n = 0\}$. Déterminer la probabilité que l'ivrogne retourne une infinité de fois à l'origine.
Rappelons la formule de Stierling $n! \sim_\infty \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Exercice 17 *(Convergence presque sûre)*

Soit $\alpha > 0$. Considérons une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli $(X_n)_{n \geqslant 1}$ de paramètres $p_n = n^{-\alpha}$, c.-à-d. $X_n \sim \mathcal{B}(p_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

a) Soit L l'événement « La suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ admet une limite ». Calculer $\mathbb{P}(L)$ en fonction de α.

b) On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X si

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \to \infty} X_n = X\right) = 1.$$

Discuter la convergence presque sûre de la suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ en fonction de α.

Exercice 18 *(Désaccord avec Borel ?)*

Considérons un jeu infini de pile ou face avec une pièce équilibrée et définissons la suite d'événements

$$F_n : \text{« le premier et le } k\text{-ème jet donnent face ».}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $F = \limsup F_n$ l'événement « les événements F_n se produisent infiniment souvent ».

a) Montrer que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(F_n) = +\infty \quad \text{et} \quad P(F) = \frac{1}{2}.$$

b) Expliquer pourquoi ceci n'est en contradiction ni avec le lemme de Borel-Cantelli, ni avec la loi du « zéro-un » de Borel [2].

Exercice 19 *(Le paradoxe du singe savant)*

Un singe (immortel) tape indéfiniment et au hasard sur le clavier d'une machine à écrire. Montrer que presque sûrement le singe écrira un nombre infini de fois l'énoncé de ce même exercice.

2. Appelé également « deuxième lemme de Borel-Cantelli ».