TD6 - Intégrale de Lebesgue

Dans toute la fiche, on supposera, sauf mention contraire, que l'on se trouve sur un espace mesuré $(E, \mathscr{T}, \mu)$.

Intégrale de Lebesgue

Exercice 1 *(Quizz)*

a) La somme de deux fonctions intégrables est elle intégrable ?

b) Le carré d'une fonction intégrable est il intégrable ? Une fonction de carré intégrable est-elle elle-même intégrable ?

c) La composée de deux fonctions intégrable est-elle intégrable ?

Exercice 2 *(Calcul d'une intégrale)*

On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Montrer que f est Lebesgue intégrable sur $[0,1]$ et calculer son intégrale.

Autour du théorème de convergence monotone

Exercice 3 *(Inversion intégrale et limite ?)*

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $f_n = \mathbb{1}_{[n,2n]}$. Vérifier que les f_n sont positives et mesurables. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n d\lambda$.

Exercice 4 *(Calcul d'une intégrale limite)*

On pose $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$. En étudiant $g_n(x) = (n+1)\log\left(1 - \frac{x}{n+1}\right) - n\log\left(1 - \frac{x}{n}\right)$, montrer que $(f_n)_n$ est une suite croissante de fonctions.

b) En déduire que $I(\alpha) := \lim_{n\to+\infty} I_{n(\alpha)}$ existe et calculer sa valeur en fonction de α.

Exercice 5 *(Théorème de convergence décroissante)*

Pour $n \geqslant 0$, on définit les fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_{[n,+\infty[}(x).$$

a) Les fonctions f_n sont-elles intégrables sur $\mathbb{R}$?

b) Dans le théorème de convergence monotone, peut-on remplacer « croissante » par « monotone » ?

c) Soit $(g_n)_n$ est une suite décroissante de fonctions réelles sur un espace mesuré. Montrer que s'il existe n_0 tel que g_{n_0} soit intégrable, la conclusion du théorème de convergence monotone s'applique.

Exercice 6 *(Interversion série intégrale)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables et positives de E dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) d\mu.$$

b) En déduire la valeur de $\sum_{n=3}^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^n} dx$.

c) Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, soit $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

(i) Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est une série convergente pour tout $x > 0$ et calculer sa somme $f(x)$.

(ii) Comparer $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. Expliquer.

Exercice 7 *(Mesure de comptage)*

On rappelle que la mesure de comptage μ est définie sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ par $\mu(A) = \text{card}(A)$ si A est fini et $\mu(A) = +\infty$ sinon.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_{\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{n\}} d\mu$, $\int_{\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \mathbb{1}_{\{k\}} d\mu$

b) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $f(n) = \frac{1}{2^n}$. Calculer $\int_{\mathbb{N}} f d\mu$.

c) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Justifier que $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$.

d) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\sum f(n)$ est absolument convergente et que, dans ce cas, $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$.

e) Donner l'exemple d'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{N}} f d\mu$ n'est pas bien défini, mais telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \in \mathbb{R}$ est bien définie.

Exercice 8 *(Majoration d'intégrales qui passe à la limite)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives convergeant simplement vers f. On suppose qu'il existe une constante K telle que $\int f_n d\mu \leqslant K$ pour tout n. Montrer que $\int f d\mu \leqslant K$.
*Indication : C*onsidérer la suite $g_n = \inf_{k\geqslant n} f_k$.

Théorème de convergence dominée

Exercice 9 *(Limites d'intégrales)*

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{n^2+1}{n^2x^2+1}dx$,

b) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{nx}\right)dx$,

c) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$,

d) $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}dx$,

e) $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{1+\cos^{2n}(x)}e^{-|x|}dx$,

f) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x}dx$,

g) $\lim_{n\to+\infty}\int_{[-n,n]}\frac{\arctan(1+x^2/n)}{1+x^2}dx$,

h) $\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,1]}(1+nx^2)(1+x^2)^{-n}dx$,

i) $\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,+\infty[}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)^{1/n}}dx$,

j) $\lim_{n\to+\infty}\int_{[a,+\infty[}\frac{n}{1+n^2x^2}dx$, $a>0$.

Exercice 10 *(Limites de séries)*

En ré-écrivant les séries comme des intégrales par rapport à la mesure de comptage, calculer

a) $\lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\left(1-\frac{1}{k(n+1)}\right)\right)$

b) $\lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{n}{k}\right)}{2^n}\right)$

Exercice 11 *(Intégration sur des « petits » ensembles)*

Soit $(X,\mathcal{B},\mu)$ un espace mesuré et soit f une fonction intégrable.

a) Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'ensembles mesurables tels que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mu(A_n)<\frac{1}{n^2}$. On pose $f_n=|f|\,\mathbb{1}_{A_n}$.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\mu\left(\cup_{k=n}^{+\infty}A_k\right)=0$. En déduire que pour μ-presque tout x, la suite $(f_n(x))_n$ est nulle à partir d'un certain rang.

b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n d\mu=0$.

c) En déduire que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que pour tout $A\in\mathcal{B}$, $\mu(A)<\delta$ implique $\int_A|f|\,d\mu<\varepsilon$.

Exercice 12 *(Série d'intégrales)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}^1(\mu)$. On suppose que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E|f_n|d\mu<\infty.$$

a) Montrer que $\int_E\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|d\mu<\infty$. En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ converge μ-presque partout.

b) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ converge pour μ-presque tout x et à un ensemble négligeable près définit une fonction $f\in\mathcal{L}^1(\mu)$.

c) Montrer que l'on a

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$$

d) Calculer

$$\int_0^1 \frac{\log(x)}{1-x} dx.$$

Lemme de Fatou

Exercice 13 *(Inégalité de Fatou stricte I)*

On note λ la mesure de Lebesgue. Soit $f_n = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$.

a) Appliquer si possible le lemme de Fatou.

b) Calculer $\liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to+\infty} f_n d\lambda$

Exercice 14 *(Inégalité de Fatou stricte II)*

Soit λ la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[-1,1]$, et $g = \mathbb{1}_{[0,1]}$. On définit $f_n(x)$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } n \text{ est pair,} \\ g(-x) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrer que

$$\int_{[-1,1]} \liminf_{n\to\infty} f_n d\lambda < \liminf_{n\to\infty} \int_{[-1,1]} f_n d\lambda.$$

Exercice 15 *(Contradiction avec Fatou ?)*

On note λ la mesure de Lebesgue. Soit $f_n = -\frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f = 0$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f mais que

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda < \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$$

Est-ce que cela contredit le lemme de Fatou ?

Exercice 16 *(Lemme de Fatou et quasi-domination)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables convergeant simplement μ-presque partout vers f. Soient h et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions positives et μ-intégrables. On suppose que $|f_n| \leqslant g_n + h$, et que $\lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu = 0$

a) En utilisant le Lemme de Fatou, montrer que f est μ-intégrable.

b) Montrer que $\liminf g_n = 0$ μ-presque partout en utilisant le Lemme de Fatou.

c) En appliquant le Lemme de Fatou aux fonctions $g_n + h \pm f$, montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leqslant \int_E f d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu,$$

en déduire $\lim \int_E f_n d\mu$.