TD7 - Lois classiques continues et moments

La loi uniforme

Exercice 1 *(Loi uniforme)*

Une variable aléatoire réelle continue X prenant des valeurs dans $[a, b]$ est appelée *uniforme*, et on note $X \sim \mathcal{U}([a, b])$, si sa fonction densité est :

$$\rho_X = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}.$$

a) Calculez la moyenne $\mathbb{E}(X)$, la variance $\mathbb{V}(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de X.

b) Pour quelles a et b, la variable X est centrée réduite ?

c) Calculez les moments $\mathbb{E}(X^n)$ de X pour $n \in \mathbb{N}$.

d) Si U est uniforme sur $[0, 1]$, quelle est la distribution de $aU + b$ pour $a, b \in \mathbb{R}$? En déduire la distribution de $1 - U$.

e) *Application.* Le temps d'attente (en minutes) pour accéder à des données suit une loi uniforme $\mathcal{U}([1, 7])$. Déterminer l'espérance du temps d'attente et son écart type.

Exercice 2 *(Fonctions de la loi uniforme)*

a) Soit $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$ une variable aléatoire réelle de loi uniforme et $X = P(U) = a_nU^n + \cdots + a_1U + a_0$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ en fonction des $(a_i)_{i=0,\ldots,n}$.

b) Soit $Y \sim \mathcal{U}([0, \pi])$, une variable aléatoire réelle de loi uniforme. Calculer $\mathbb{E}(\sin(Y))$ et $\mathbb{V}(\sin(Y))$, ainsi que $\mathbb{E}(\cos(Y))$ et $\mathbb{V}(\cos(Y))$.

Exercice 3 *(Simulation par la loi uniforme)*

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X. Pour $u \in]0, 1[$, on pose

$$G(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geqslant u\}.$$

On appelle G *l'inverse généralisée* de F.

a) Montrer que $\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geqslant u\}$ est un intervalle fermé minoré et non majoré. En déduire que G est bien définie et que $\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geqslant u\} = [G(u), +\infty[$.

b) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $u \in]0, 1[$,

$$F(x) \geqslant u \iff x \geqslant G(u).$$

c) Pour $U \sim \mathcal{U}(]0, 1[)$, quelle est la fonction de répartition de $G(U)$? Conclure.

d) Trouver G telle que $G(U)$ soit discrète uniforme sur $\{n, n + 1, \ldots, m\}$ quand $U \sim \mathcal{U}(]0, 1[)$.

Exercice 4 *(Ni continue, ni discrète)*

Pour X variable positive de fonction de répartition F_X, démontrer que

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \int_0^{+\infty} 1 - F_X(t)dt \quad \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Indication : Utiliser l'exercice précédent pour écrire $\mathbb{E}\left(X\right) = \int_0^1 G(t)dt$.

Soit X une variable uniforme sur $[1, 3]$ et $a \in [1, 3]$.

a) Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = \min\{X, a\}$?

b) Admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

c) Que vaut cette espérance si $a = 1$? $a = 3$? Est-ce que vous auriez pu trouver ces deux résultats autrement ?

D'autres lois classiques

Exercice 5 *(Loi exponentielle)*

Une variable aléatoire réelle positive X est appelée *exponentielle* avec le paramètre $\lambda > 0$ si X admet pour fonction densité :

$$\rho_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ pour } t \in \mathbb{R}_+.$$

a) Calculez la moyenne $\mathbb{E}(X)$, la variance $\mathbb{V}\left(X\right)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de X.

b) Déterminer une fonction G telle que pour $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$, la variable $G(U)$ soit exponentielle.

Exercice 6 *(Loi normale)*

Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite.

a) Justifier que X admet des moments à toute ordre.

b) Que valent $\mathbb{E}\left(X^{2n+1}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$?

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \mathbb{E}\left(X^{2n}\right)$. Montrer que $c_n = (2n - 1)c_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire une formule explicite pour $\mathbb{E}\left(X^{2n}\right)$.

d) En déduire $\mathbb{E}\left(X\right)$, $\mathbb{V}\left(X\right)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 7 *(Loi de Cauchy)*

Une variable aléatoire réelle X est dite *de Cauchy standard* si la fonction densité de X est :

$$\rho_X(t) = \frac{1}{\pi(1 + t^2)} \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

a) Calculez l'espérance $\mathbb{E}(X)$, si elle existe.

b) Montrer que $\sigma X + \mu$ est une variable continue et calculer sa densité.
Nous appelons cette distribution une distribution Cauchy *avec les paramètres* (μ, σ).

c) Déterminer une fonction G telle que pour $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$, la variable $G(U)$ soit de Cauchy standard.

Exercice 8 *(Loi de Laplace)*

On considère une variable aléatoire X dont la densité est donnée par

$$f(x) = ce^{-|x|}.$$

a) Calculer c.

b) Démontrer que X admet des moments de tout ordre. Les calculer.

Variables continues - supplément

Exercice 9 *(Consommation d'eau)*

La consommation journalière en eau d'une agglomération au cours du mois de juillet est une variable aléatoire X dont la densité f a la forme :

$$\rho(t) = c(t-a)(b-t)\mathbb{1}_{[a,b]}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

où a, b, c sont des constantes strictement positives ($a < b$).

a) Vérifier que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_a^b (t-a)^n(b-t)\, dt = \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

b) Exprimer la constante c en fonction de a et b.

c) Calculer $\mathbb{E}(X-a)$ et $\mathbb{E}\left((X-a)^2\right)$. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

d) Donner la fonction de répartition F de la variable aléatoire X. Donner l'allure des représentations graphiques de ρ et F. Proposer une interprétation physique des constantes a et b.

Exercice 10 *(Loi log-normale)*

On dit qu'une variable positive X suit une loi log-normale si $Y = \ln X$ suit une loi normale centrée réduite.

a) Exprimer la fonction de répartition de X à l'aide de la fonction de répartition ϕ de la loi normale centrée réduite. Calculer sa densité.

b) Démontrer que $\mathbb{E}(X) = \sqrt{e}$.

Exercice 11 *(Une loi à reconnaître)*

Soit ρ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\rho(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$.

a) Démontrer que ρ est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

b) On considère la variable aléatoire $Y = \ln(1+|X|)$. Calculer sa fonction de répartition.

c) Reconnaître la loi de Y.

Exercice 12 *(Entropie)*

Étant donné X une variable aléatoire réelle de densité f_X, on appelle entropie de X la quantité suivante, si elle existe,

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log f_X(x) dx.$$

a) Calculer l'entropie d'une loi aléatoire uniforme sur le segment $[a, b]$.

b) On suppose que X suit une loi normale, d'espérance m et variance σ^2, i.e. $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, dont on rappelle la densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

(i) Rappeler l'expression de l'espérance et de la variance de X, sous formes d'intégrales de f_X.

(ii) Montrer que $h(X) = \frac{1}{2}(1 + \log(2\pi\sigma^2))$.

c) On souhaite prouver que, parmi les variables aléatoires de variance donnée, les lois normales admettent une entropie maximale. On fixe Y une variable aléatoire réelle centrée (c'est-à-dire d'espérance nulle), de densité f_Y et de variance σ^2, admettant une entropie. On note φ la densité d'une loi normale centrée ($m = 0$), de variance σ^2. On suppose que les fonctions

$$x \mapsto f_Y(x) \log \frac{\varphi(x)}{f_Y(x)} \quad \text{et} \quad x \mapsto f_Y(x) \log \varphi(x)$$

sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

(i) Démontrer que pour tout $x > 0$, $\log x \leqslant x - 1$.

(ii) Vérifier que

$$h(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x) \log \frac{\varphi(x)}{f_Y(x)} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x) \log \varphi(x) dx.$$

(iii) En déduire que $h(Y) \leqslant \frac{1}{2}(1 + \log(2\pi\sigma^2))$.

Exercice 13

Le nombre d'accidents en une semaine dans une usine est une v.a. de moyenne μ et de variance σ^2. Le nombre d'individus blessés dans un accident est une v.a. de moyenne ν et de variance τ^2. Les nombres d'individus blessés dans des accidents différents sont indépendants.

Donner l'espérance et la variance du nombre d'individus blessés en une semaine.